Logique et ensembles

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, septembre 2019

Contenu du cours

Contenu :

1. Logique et ensembles, y compris les relations et applications
2. Nombres complexes (on admettra que vous connaissez $\mathbb{R}$)
3. Binôme de Newton et analyse combinatoire ? ? ?

---

4. L'ensemble $\mathbb{N}$, opérations, ordre, division euclidienne, un mot sur la décomposition en nombres premiers ? ? ?
5. Quelques curiosités sur le cardinal, relations d'équivalences et quotients ? ? ?
6. Les entiers relatifs et la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$? ? ?
7. Les rationnels et la structure de champ de $\mathbb{Q}$? ? ?
8. Un mot d'arithmétique modulaire ? ? ?

Un peu partout, des rappels de notions vues dans le secondaire, et un souci de la rédaction.

Déroulement : 30h (10h) de cours ($+\varepsilon$), 30h (5h) de répétitions, 15h (0h) de TD ((éventuellement commués en exercices en ligne). Lire l'engagement pédagogique pour les modalités pratiques.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Point de vue et méthode

Point de vue

1. Pour la plupart des notions, il s'agit d'une reconstruction.
2. Vous ne devez pas oublier ce que vous connaissez : si on vous demande si π ou $\sqrt{2}$ est rationnel,..., ou de résoudre $\sin(x) < \frac{1}{2}$ etc...
3. On va essayer de partir de rien, littéralement de l'ensemble vide.
4. En ce qui concerne la logique et la théorie des ensembles, ou l'ensemble $\mathbb{N}$, je devrai admettre certaines choses, et ne pas clairement définir certaines notions. On pourrait ne pas le faire, mais c'est difficile en bloc 1.

Méthode

1. Je procède avec des slides, pour gagner du temps (de copie), et le consacrer à des activités plus intelligentes
2. Les résultats sont tous repris des notes
3. Vous pouvez les lire à l'avance
4. N'essayez pas de les recopier dans vos notes en direct

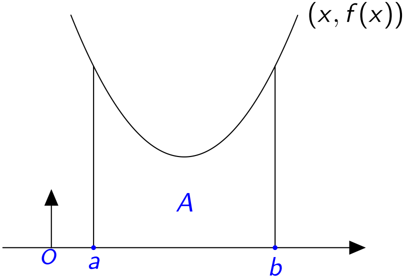
P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Pourquoi reconstruire ?

- On a accepté beaucoup de propriétés dans l'enseignement secondaire, parce qu'elles étaient plausibles, raisonnables.
- On ne pouvait pas faire autrement, parce qu'il n'était pas possible de commencer par le début (on a essayé à un moment).
- Quand on quitte les mathématiques "scolaires", où le professeur (ou le programme) a éliminé les situations difficiles, il vaut mieux être sûr de ce que l'on sait, et pouvoir ainsi être autonome.
- Voici quelques exemples simples.

Rappel : Intégrale d'une fonction continue et positive sur l'intervalle fermé $[a, b]$

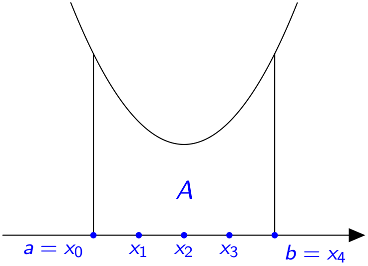
Soit une fonction f continue et à valeurs positives sur $[a, b]$.



L'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire "sous la courbe".

Méthode de calcul par approximation

On fait un découpage de l'intervalle $[a, b]$ en se donnant des points $x_1 < \cdots < x_{n-1} \in]a, b[$. On pose $a = x_0$ et $b = x_n$.



On a donc n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$

Une approximation par défaut de l'aire

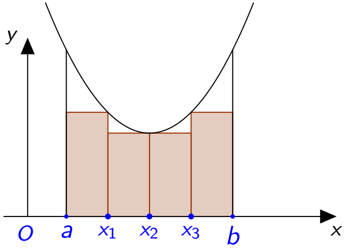
Puisque f est continu, f admet sur $[x_{i-1}, x_i]$

- un minimum global, réalisé en un point m_i ;
- un maximum global, réalisé en un point M_i.

On définit la quantité

$$A_{\inf}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i.$$

C'est la somme des aires des rectangles de $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(m_i)$.

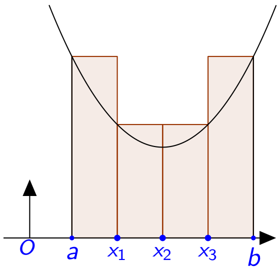


Une approximation par excès de l'aire

On peut aussi définir la quantité

$$A_{\sup}(x_0,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$

C'est la somme des aires des rectangles de $[x_{i-1},x_i]$ et de hauteur $f(M_i)$.

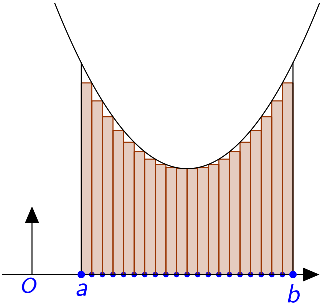


P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

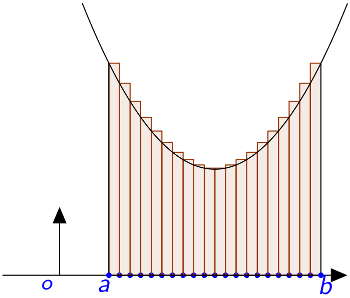
En raffinant le découpage :

On approche l'aire par une somme d'aire de rectangles, et on passe à la limite, quand la mesure de la base des rectangles tend vers 0.

Le découpage et A_{inf}



Le découpage et A_{sup}



On voit bien que la somme des aires des rectangles converge vers un nombre, qui ne peut être que l'aire cherchée.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Calcul par variation d'une primitive

Pour calculer $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

- On trouve une primitive F de f.
- On calcule $F(b) - F(a)$.

Exercices :

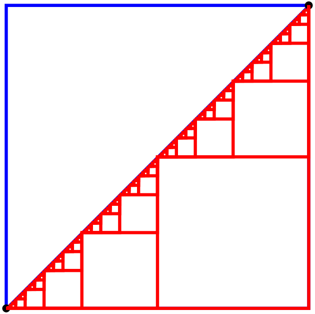
Calculer

- $\displaystyle\int_0^2 (e^x + x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

On voit bien que $2 = \sqrt{2}$, ou la géométrie du pacman

Considérons un carré de côté 1. Quelle est la longueur de la diagonale ?



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

On voit bien que $2 = \sqrt{2}$, ou la géométrie du pacman

Résumé de la preuve :

- Quand le nombre de changements de direction tend vers l'infini, le pacman parcourt la diagonale du carré, donc $\sqrt{2}cm$.
- Mais à chaque étape, avec n "angles", le pacman parcourt $d_n = 2cm$.
- On voit donc que $\lim_{n\to+\infty} d_n = \sqrt{2}$.
- On sait que $\lim_{n\to+\infty} d_n = 2$.
- Comme la limite d'une suite convergente est unique, on conclut donc que $2 = \sqrt{2}$! Donc $2 = 4$, $1 = 2 = 0$ etc...

Exercice : montrer que $\pi = 2$, à l'aide du pacman et d'un cercle de rayon 1.

Morale générale : on ne peut pas donc toujours croire ce que l'on voit !
Mais comment savoir ce qui est correct et ce qui est faux dans notre intuition ?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Il faut démontrer que les propriétés sont vraies, sans accepter ce que les yeux voient.

Mais, combien de fois vous a-t-on dit “on voit bien que...”

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, les dérivées des fonctions trigonométriques,
- On voit bien que $\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x)$,
- On voit bien que tout nombre positif est le carré d'un nombre réel,
- On voit bien que les opérations sur les réels ne posent pas de problème...
- On voit bien que le produit de nombres négatifs se comporte bien...
- Une droite est un ensemble infini de points alignés... et des points alignés sont des points sur une même droite.
- Et tout ce que l'on a vu en primaire, basé sur l'intuition...

Bref, on doit recommencer à partir de rien, de l'ensemble vide en fait.

Logique, assertions

- On doit se mettre d'accord sur un langage pour écrire/créer des résultats.
- Il faut que la façon d'interpéter les phrases formées soient identique pour tous.
- On va écrire ces "phrases" en connectant des "morceaux" élémentaires.

Définition 1.1.1

On appelle *assertion* ou *proposition logique* (ou proposition) toute phrase d'un langage donné dont on peut envisager sans ambiguïté le problème de sa vérité ou de sa fausseté.

Exemples :

1. "Aujourd'hui, je porte un pull rouge" ;
2. "3 est un nombre premier" ;
3. "3 n'est pas divisible par 2" ;
4. "tout nombre positif est pair" ;
5. "Il pleut" ;
6. "J'emporte un parapluie" ;
7. "Si Berlin est en Suisse, alors je viens de Mars" ;

Contre-exemples, syntaxe, sémantique

Pour toutes ces phrases, on peut dire (selon le contexte) si elles sont vraies (V ou 1), ou fausses (F ou 0). Ce n'est pas le cas des suivantes, qui ne sont donc pas des propositions :

1. "Quelle heure est-il ?"
2. "Paris est-elle la capitale de la France ?"
3. "Cette phrase est fausse."
4. "Je dégrouille bien la kasibulle gauche."

Syntaxe : règles formatives qui permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'anciennes. L'idée est qu'on déclare dans ces règles quelles phrases sont des propositions.

Méthode : On admet qu'il existe des propositions élémentaires dites *propositions atomiques* ou *variables propositionnelles*, notées p, q, r, et donne des règles permettant d'en former de nouvelles avec des connecteurs.

Sémantique : décider de la vérité de telles propositions, en fonction de la vérité ou la fausseté des propositions atomiques. En pratique, on examine tous les cas possibles pour les connecteurs, à l'aide de tables de vérité.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La négation

Voici un premier connecteur, la négation.

Définition 1.1.2

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion. On la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est fausse et elle est fausse si P est vraie. La table de vérité de l'opérateur de négation $\neg$ est donc la suivante.

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Exemples :

1. "Aujourd'hui, je ne porte pas un pull rouge" ;
2. "3 n'est pas un nombre premier" ;
3. "3 est divisible par 2" ;
4. "Il existe un nombre positif qui n'est pas pair"

Exercice : Ecrire la table de P, $\neg P$ et $\neg(\neg P)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equivalence logique

Définition 1.1.3

Deux propositions logiques P et Q (composées à partir de propositions élémentaires) sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité (i.e. les mêmes valeurs de vérité, dans tous les cas). On note alors $P \equiv Q$.

On a donc $P \equiv \neg(\neg P)$.
Remarques : 1) Ce n'est pas une définition standard
2) Si $P \equiv Q$, on peut les remplacer l'une par l'autre dans toute proposition composée où elles apparaissent.
Cela permet donc de simplifier des assertions comme :
Il n'est pas impossible que ce cours ne soit pas dépourvu de concepts nouveaux.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La conjonction “et”

Définition 1.1.4

Si P et Q sont deux assertions, alors la conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ ou “P et Q” est une assertion qui est vraie quand P est vraie et Q est vraie (simultanément) et fausse sinon. La table de vérité du connecteur “et” est donc

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On peut ainsi former les assertions

1. “Il pleut et je porte un pull rouge” ;
2. “J'emporte un parapluie et 3 est un nombre premier”.

Remarque : la valeur de vérité de $P \wedge Q$ est le minimum des valeurs de vérité de P et Q

La disjonction “ou”

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ ou “P ou Q” est une assertion qui est vraie quand au moins l’une des deux assertions P, Q est vraie et qui est fausse sinon. Sa table de vérité est donc la suivante.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarque : la valeur de vérité de $P \vee Q$ est le maximum des valeurs de vérité de P et Q

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Négations de “et” et “ou”

Proposition 1.1.1

On a les équivalences logiques suivantes

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;

Preuve : A faire.

Exemples :

- La négation de “Il pleut ou je porte un pull rouge” est “il ne pleut pas et je ne porte pas de pull rouge”.
- La négation de “Il pleut et nous sommes mardi” est “il ne pleut pas ou nous ne sommes pas mardi”.

L'implication

Je fais l'affirmation suivante "Si on est vendredi, alors je porte un pull rouge". Comment pouvez-vous montrer que c'est faux ?

Définition 1.1.6

Si P et Q sont deux assertions, alors "P implique Q" est une assertion. On la note $P \Rightarrow Q$. Elle est toujours vraie sauf si P est vrai et Q faux. La table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Attention : Il faut choisir entre les écritures "Si P alors Q" et $P \Rightarrow Q$. On ne peut pas écrire "Si $P \Rightarrow Q$".

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques exemples :

1. "S'il pleut alors j'emporte un parapluie." [1]
2. "Si on est vendredi, je porte un pull rouge." [2]
3. "Si 3 est un nombre premier, alors je porte un pull rouge."

Attention : Ne pas confondre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
Exercices : Démontrer les équivalences logiques

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$$

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$$

1. Cette implication ne donne aucune indication s'il ne pleut pas.
2. On peut aussi dire "Tous les vendredis, je porte un pull rouge."

La bi-implication

Définition 1.1.7

Si P et Q sont deux assertions alors "P bi-implique Q", "P est équivalent à Q" est une assertion. On la note $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie quand P implique Q et Q implique P sont vraies. La table de vérité du connecteur $\Leftrightarrow$ est donc

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

1. Par définition, on a $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
2. On dira aussi "P si et seulement si Q.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quantificateurs

Le signe $\forall$ se lit "pour tout" et le signe $\exists$ se lit "il existe". Ainsi, si P et Q sont deux assertions, on peut écrire

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

pour signifier "pour tout x tel que P , il existe un y tel que Q".
Exemple : La convergence d'une suite numérique vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Attention à l'abus de langage.
Démontrer que cette assertion est vraie pour la suite définie par $x_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
On ne peut pas inverser les quantificateurs, car le N utilisé dans la preuve est donné en fonction du nombre ε choisi.
Négations :

1. La négation de "Tous les profs de math sont petits" est "Il existe un prof de math qui n'est pas petit".
2. La négation de "Il existe un cheval de course bon marché" est "Tous les chevaux de course coûtent cher".
3. Nier la condition de convergence d'une suite vers 0.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parenthèses

Voici la tables de vérité de $(P \wedge Q) \vee R$ et de $P \wedge (Q \vee R)$.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Conclusion : L'assertion $P \wedge Q \vee R$ n'a pas de sens.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Contraposition et distributivité

Proposition 1.1.2

Si P et Q sont deux assertions, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à l'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$. En d'autres termes, on a,

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Preuve : A faire (2 méthodes)
L'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.
Exemple : "Si on est vendredi, je porte un pull rouge" et "Si je ne porte pas de pull rouge, on n'est pas vendredi".
Voici également deux formules utiles qui mêlent les "et" et les "ou", dont je laisse la démonstration comme exercice : On a

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

et

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

pour toutes assertions P, Q, R.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques exercices sur les équivalences logiques

Prouver les équivalences logiques suivantes, où P, Q, R sont des assertions quelconques

- $P \vee Q \equiv Q \vee P$
- $P \wedge Q \equiv Q \vee P$
- $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
- $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Tautologies et contradictions

Définition 1.1.8

Une assertion composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent est une *tautologie*.

Définition 1.1.8 bis

Une assertion composée qui est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent est une *contradiction*.

Remarque : 1) Dire que P et Q sont logiquement équivalentes est donc la même chose que dire que $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie. 2) Toutes les tautologies sont logiquement équivalentes entre elles. De même que toutes les contradictions.

Exemples :

- $((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$ est une tautologie
- $P \vee (\neg P)$ est une tautologie
- $P \wedge (\neg P)$ est une contradiction
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$ sont des tautologies
- $P \Rightarrow (P \vee Q)$ et $Q \Rightarrow (P \vee Q)$ sont des tautologies

Equivalences logiques et techniques de démonstration

La première tautologie de la page précédente donne lieu a une technique de démonstration appelée *modus ponens*. Elle rejoint l'intuition : si $P \Rightarrow Q$ est vrai et si P est vrai, alors Q est vrai.

Exemple : si vous savez que

1. Si il pleut à 7h alors je porte un parapluie toute la journée
2. Il pleut à 7h

Vous pouvez en déduire que je porte un parapluie. De manière générale, les équivalences logiques (et plus généralement les tautologies) permettent de donner des techniques de déduction.

Deux exemples par contraposition :

Proposition 1.1.4

Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

Proposition 1.1.5

Si n est un nombre entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La démonstration par l'absurde

Proposition 1.1.6

Pour toutes assertions P et Q, l'assertion P est logiquement équivalente à $(\neg P) \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))$.

Proposition 1.1.7

Il n'existe pas de nombre rationnel z tel que $z^2 = 2$.

- On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{Q}$ tel que $z^2 = 2$.
- On peut supposer que z est positif,
- On peut supposer qu'il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers positifs, et que p et q n'ont pas de facteur commun (donc par ex. que q est minimal)
- alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2p'$
- De même q est pair, $q = 2q'$, et on a une contradiction.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Contre-exemple et démonstration d'une alternative

Proposition 1.1.8

On a l'équivalence logique $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

Proposition 1.1.9

On a les équivalences logiques suivantes :

$$P \Rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow R \quad \text{et} \quad P \Rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \wedge (\neg R)) \Rightarrow Q.$$

Utiliser ces équivalences pour traduire “si je vis sur mars, alors je suis bleu ou j'ai quatre bras”

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La disjonction des cas

Proposition 1.1.10

On a l'équivalence $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$.

Preuve : Table de vérité, ou utiliser ce que l'on connaît.

Proposition 1.1.11

Si n est entier naturel, alors $n(n+1)$ est pair.

Remarque : Attention, faute de frappe dans les notes ($\mathbb{N}$).

Des exercices

Donner la négation de la proposition logique "Tous les professeurs de mathématiques sont petits ou sont méchants aux examens." On suppose que grand est la négation de petit, et être gentil aux examens est la négation d'être méchant aux examens.

1. Tous les professeurs de mathématiques sont grands et sont gentils aux examens
2. Tous les professeurs de mathématiques sont grands ou sont gentils aux examens
3. Il existe un professeur de mathématique qui est grand et qui est gentil aux examens
4. Il existe un professeur de mathématique qui est grand ou qui est gentil aux examens

Parmi les propositions suivantes, déterminez celle qui est équivalente à l'assertion "Si on est en Belgique, alors il pleut ou il fait trop chaud"

1. Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas et il ne fait pas trop chaud
2. Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas ou il ne fait pas trop chaud
3. S'il ne pleut pas et s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique
4. S'il ne pleut pas ou s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique

Théorie naïve des ensembles

Pourquoi naïve ?

Définition 1.2.1

Un *ensemble* est une collection d'objets possédant une ou plusieurs propriétés communes. Ces objets sont les *éléments* ou *points* de l'ensemble.

Notation : Généralement une lettre majuscule, mais pas obligatoirement.

Les *éléments* peuvent par exemple être donnés

1. de manière explicite, par des symboles tels que $1, 2, 3, a, b \ldots$;
2. par un symbole générique affecté par un ou plusieurs indices, par exemple x_i où i est un élément quelconque d'un autre ensemble.

Un *ensemble* peut être donné

1. de manière explicite, (définition en *extension*) comme par exemple $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ou $B = \{a, b, c, d, e\}$;
2. de manière explicite, mais sans donner tous les éléments, que l'on peut remplacer par des points de suspension, par ex. $D = \{a, b, c, \ldots, z\}$.
3. par une propriété caractérisant ses éléments, (définition en *compréhension*) comme dans

$$\{n : n \text{ est entier, pair et compris entre } 1 \text{ et } 99\}.$$

Premières relations

1. ***Ensemble vide*** : il existe un ensemble qui ne contient pas d'éléments, l'ensemble vide, noté $\varnothing$.
2. ***Appartenance*** : on écrit $x \in A$ (x appartient à A) pour signifier que x est un élément de l'ensemble A.
3. ***Inclusion*** : on écrit $B \subset A$ (B est inclus dans A, ou B est un sous-ensemble de A) quand tout élément de B est aussi un élément de A. Dans ce cas, on dit que B est un sous-ensemble de A.
   L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble donné.
   Par exemple, si $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
   $A = \{n : n \text{ est un nombre entier pair}\}$, on a $B \subset A$.
4. ***Egalité*** : on écrit $A = B$ (A et B sont égaux) quand les ensembles A et B ont les mêmes éléments. Cela se traduit aussi par le fait que $A \subset B$ et $B \subset A$.

- On a $A \subset B$ si l'implication $x \in A \Rightarrow x \in B$ est vraie, quel que soit l'objet x considéré.
- On a $A = B$ si l'équivalence $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ est vraie, quel que soit l'objet x considéré.

Assertions et ensembles, d'autres notations

Assertions et ensembles

- Si P est une assertion, on désigne par $\{x : P\}$ ou par $\{x|P\}$ l'ensemble des objets x pour lesquels la propriété P est vérifiée.
- Si E est un ensemble, on peut considérer l'assertion $x \in P$.

Ces deux constructions semblent inverses lune de l'autre, mais vont poser problème.
Notations classiques : $x \notin A$, $B \not\subset A$ ou $A \neq B$, $A \ni a$, $A \supset B$ ou $A \not\ni a$.
Attention :
$\{x : x \in \mathbb{N}\,\text{et}\, x\,\text{est un cube}\} = \{x \in \mathbb{N} : x\,\text{est un cube}\} = \{x^3 : x \in \mathbb{N}\}$.

Opérations sur les ensembles

1. ***Union*** : l'ensemble $A \cup B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On a donc, d'un point de vue logique

$$(x \in A \cup B) \equiv ((x \in A) \,\text{ou}\, (x \in B)).$$

2. ***Intersection*** : l'ensemble $A \cap B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A et B. On a donc, d'un point de vue logique

$$(x \in A \cap B) \equiv ((x \in A) \,\text{et}\, (x \in B)).$$

3. ***Différence*** : l'ensemble $A \setminus B$ (lisez A moins B) est formé par les éléments qui appartiennent à A et pas à B. On a donc, d'un point de vue logique

$$(x \in A \setminus B) \equiv ((x \in A) \,\text{et}\, \neg(x \in B)).$$

Diagrammes de Venn [3]

- On représente l'ensemble par une courbe fermée, cercle ou une ellipse (appelées parfois patates).
- Si on veut marquer qu'un objet est un élément de l'ensemble, on le place dans la région correspondante.
- On représente plusieurs ensembles (généralement 2, 3 ou 4) par plusieurs courbes fermées.

Soit A : l'ensemble des nombres entiers pairs et strictement positifs.

A gauche, on marque que 2 et 4 sont des éléments.

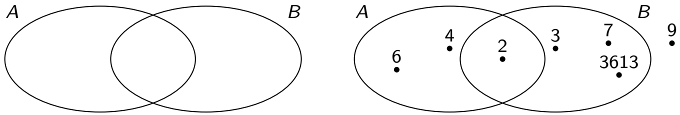
3. John Venn (1834-1923) les formalisa en 1880.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Deux ensembles

Deux ensembles ? Deux patates.

- Soit A l'ensemble des nombres pairs strictement positifs ;
- Soit B l'ensemble des nombres premiers.

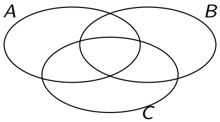


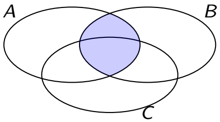
- A gauche, la situation générale, à droite, on a marqué quelques points.

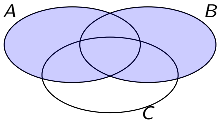
P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Applications des diagrammes de Venn

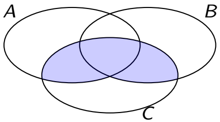
- On colorie les zones qui nous intéressent.
- A gauche, on a représenté la situation générale, au milieu, on a colorié la zone représentant $A \cap B$, à droite la zone représentant $A \cup B$.







On peut colorier la zone représentant $(A \cup B) \cap C$:

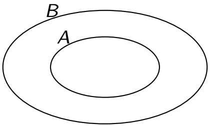


On peut constater $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

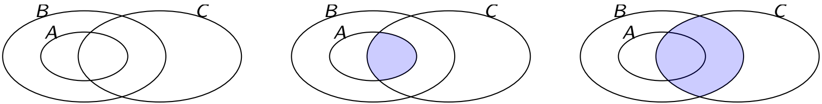
P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un exemple

Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre que si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$, quels que soient les ensembles A, B et C.
La situation où on a $A \subset B$ se représente à l'aide de diagrammes de Venn de la manière suivante.



On représente alors l'ensemble C de la manière la plus générale comme dans la figure de gauche. Au milieu, on peut colorier $A \cap C$ et à droite $B \cap C$.



On constate alors l'inclusion sur le diagramme de Venn. Attention, ce n'est pas une démonstration.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un gros théorème

Proposition 1.2.1

Si X est un ensemble et si A, B, C sont trois sous-ensembles de X, alors

1. $X \cup X = X$, $X \cap X = X$;
2. $X \setminus X = \varnothing$, $X \setminus \varnothing = X$, $\varnothing \cup X = X$, $\varnothing \cap X = \varnothing$;
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5. $A \cup (X \setminus A) = X$, $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$;
6. Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$;
7. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
8. si $C \subset A$ et $C \subset B$, alors $C \subset A \cap B$;
9. si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors $A \cup B \subset C$;
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
12. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
13. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
14. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$;
15. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Le paradoxe de Russell

La théorie naïve des ensembles est contradictoire. Le problème vient de la définition des ensembles et de la correspondance “assertion-ensemble”.

- Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, a, b, 2\}$ et $B = \{1, 2, 4, B, a, u, v\}$.
- On a on a $B \in B$.
- Ensembles **extraordinaires** : ceux qui se contiennent eux-mêmes (comme élément)
  Ensembles **ordinaires** : ceux qui ne sont pas extraordinaires
- Soit R l'ensemble des ensembles ordinaires.
- Alors R n'est ni ordinaire, ni extraordianire.

Produit cartésien, et une notation

Vous avez vu le symbole somme

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2.$$

On peut utiliser cette notation avec l'union et l'intersection

$$\cup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n \quad \cap_{j=1}^{p} B_j = B_1 \cap \cdots \cap B_p.$$

Définition 1.3.1

Si A et B sont deux ensembles, alors le produit cartésien de A et B est

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Définition 1.3.2

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles ($n \in \mathbb{N}_0$), alors

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Démonstrations par récurrence

Ce type de démonstration est basé sur la construction axiomatique de $\mathbb{N}$. Sans entrer dans les détails,

1. On commence par admettre qu'il y a un point de départ, 0 (axiome 1)
2. Ensuite, on admet que tout nombre n a un successeur unique $s(n) = n + 1$, et que des nombres distincts ont des successeurs distincts. (axiome 2)
3. 0 n'est le successeur d'aucun nombre (axiome 3)
4. On prend comme axiome que tous les nombres naturels sont obtenus comme cela. (axiome 4)

Ces axiomes font partie de la définition de $\mathbb{N}$ due à Peano (1889).

La démonstration par récurrence classique

Proposition xxx

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une assertion $P(n)$, et si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'assertion $P(0)$ est vraie ;
2. Pour tout n, si $P(n)$ est vrai alors $P(s(n))$ est vrai ;

alors l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Cela donne un nouveau type de démonstration, par récurrence ou induction.
2. On a deux parties, un *cas de base* et la *récurrence* ou l'*induction*.
3. Attention à ne pas inverser les quantificateurs.
4. Dans l'induction "si $P(n)$ est vraie, alors $P(s(n))$ est vraie" la première assertion est l'hypothèse de récurrence (ou d'induction).
5. Ne pas confondre l'induction et la conclusion. On peut utiliser une autre lettre et écrire : "Pour tout k, si $P(k)$ est vraie, alors $P(s(k))$ est vraie".

Et si on veut une propriété vraie pour $n \geqslant 1$?

Exemples : Démontrer que l'on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Proposition xxx

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si pour tout $n \geqslant n_0$, on se donne une assertion $P(n)$, et si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'assertion $P(n_0)$ est vraie ;
2. Pour tout $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vrai alors $P(s(n))$ est vrai ;

alors l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Preuve : Définir $Q(n)$ comme “$P(n)$ ou $n < n_0$”.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La récurrence forte

Proposition

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une assertion $P(n)$, et si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $P(0)$ est vrai ;
2. Pour tout k, si $P(0), \ldots, P(k)$ sont vrais, alors $P(k+1)$ est vrai ;

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Considérer "$Q(n)$: $P(k)$ est vraie pour tout k t.q. $0 \leqslant k \leqslant n$."
Remarques :

1. Ici aussi, on peut démontrer des propriétés vraies pour tout $n \geqslant n_0$.
2. Pourquoi "récurrence forte" ?
3. Oui, mais...les deux "axiomes" sont équivalents
4. Ils sont aussi équivalents au fait que $\mathbb{N}$ soit bien ordonné (on en reparlera avec les mathématiciens).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une exemple : décomposition en nombres premiers

Definition 2.1.2

Un nombre naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs, à savoir 1 et p.

Exemples : 0, 1 ne sont pas premiers, 2,3,5 sont premiers...

Exemple 2.1.1

Pour tout nombre n supérieur ou égal à 2, il existe des nombres premiers $p_1, \ldots, p_l$, $(l \geqslant 1)$ (éventuellement égaux), tels que $n = p_1 \cdots p_l$.

Preuve : Induction forte, faire le cas de base, puis la récurrence forte.

Quelques exercices standards

1. Démontrer la formule du binôme de Newton.
2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$;
4. Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2.
5. Démontrer qu'une suite satisfait $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ et $x_0 = x_1 = 1$ si et seulement si
$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
6. Division des polynômes : pour tous polynômes P et $D \neq 0$, il existe des polynômes Q et R, tels que $P = QD + R$ et tels que le degré de R soit strictement inférieur au degré de D (le degré du polynôme nul est strictement négatif).

Relations

L'idée est ici de définir ce qu'est une application (fonction), on plus généralement une relation d'un ensemble vers un autre et éviter "Une fonction de A dans B est une loi qui à tout x associe $f(x)$".

Définition 1.3.3

Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est une partie de $A \times B$. On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$.

Autre notation : Si $(a, b) \in \mathcal{R}$, on note aussi $a\mathcal{R}b$ et on dit que a est en relation avec b. Donc le lien est

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B | a\mathcal{R}b\}.$$

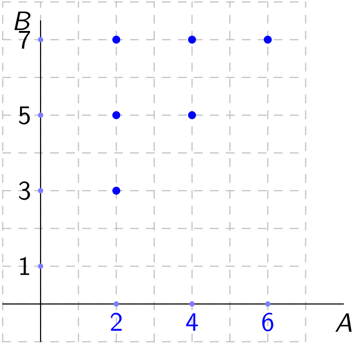
Exemple : Si $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7\}$, alors la relation "est plus petit que", de A dans B est

$$\mathcal{R} = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation cartésienne

Si A et B sont des ensembles de nombres, on peut les représenter comme d'habitude.



C'est une représentation parmi d'autres ! La relation n'est pas le dessin.

Mais elle permet de se faire une idée intuitive, et nous la conserverons, même quand A et B ne sont pas des ensebles de nombres.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

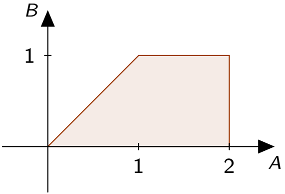
D'autres exemples

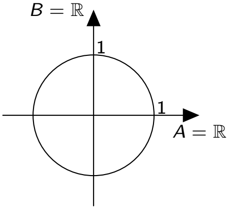
Considérons la relation $\geqslant$ de $A = [0,2]$ dans $B = [0,1]$ donnée par

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in [0,2] \times [0,1] : x \geqslant y\}.$$

Soit $\mathcal{R}_2$ la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}_2 y \quad \text{si, et seulement si} \quad x^2 + y^2 = 1.$$



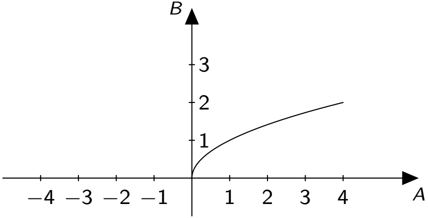


Exemples

Terminons par la relation $\mathcal{R}_3$ définie de $A = [-4, 4]$ dans $B = [0, 3]$ par

$$x\mathcal{R}_3 y \quad \text{si, et seulement si} \quad y^2 - x = 0.$$

Elle est représentée par



Un mot sur le graphe...

Domaine et image

Définition 1.3.4

Soit $\mathcal{R}$ une relation de A dans B. On appelle *domaine* de $\mathcal{R}$ l'ensemble des points a de A qui sont en relation avec au moins un élément b de B. On le note $\mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$ ou $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$ ou encore $D_{\mathcal{R}}$. On a

$$\mathrm{dom}_{\mathcal{R}} = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) = D_{\mathcal{R}} = \{a \in A : \exists b \in B : a\mathcal{R}b\}.$$

On appelle *codomaine* ou *image* de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ (ou $\mathrm{Im}_{\mathcal{R}}$) des points b de B tels qu'il existe au moins un élément a de A qui soit en relation avec b. On a

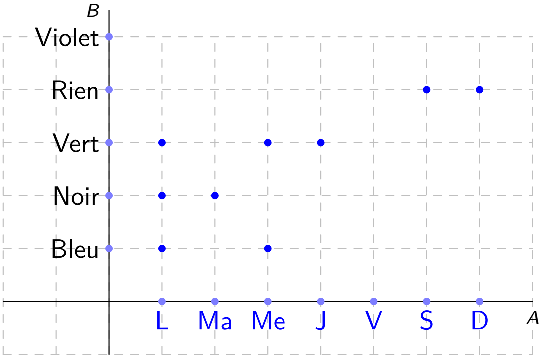
$$\mathrm{Im}_{\mathcal{R}} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A : a\mathcal{R}b\}.$$

Exemple : Soit $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $x = y^2$. Représenter cette relation. Quel est son domaine, quelle est son image ?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemple 1 Pg 16

Si $A = \{\mathrm{L}, \mathrm{Ma}, \mathrm{Me}, \mathrm{J}, \mathrm{V}, \mathrm{S}, \mathrm{D}\}$ et $B = \{\mathrm{bleu}, \mathrm{noir}, \mathrm{vert}, \mathrm{rien}, \mathrm{violet}\}$, et si $\mathcal{R}$ est représentée par



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Autres exemples et représentation sagitale

Donner le domaine et l'image des relations :

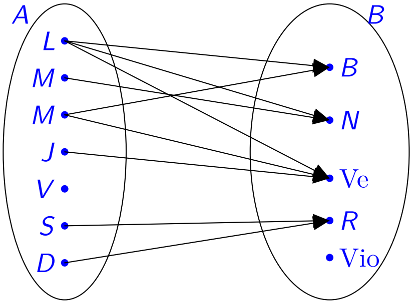
- la relation $\mathcal{R}_2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $x\mathcal{R}_2y$ si, et seulement si $x + y = 3$.
- la relation $\mathcal{R}_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}_2y$ si, et seulement si $|x| + |y| = 3$.

Définition 1.3.5

La représentation sagittale d'une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est obtenue en représentant les ensembles par des diagrammes de Venn et en indiquant une flèche de $a \in A$ vers $b \in B$ quand $a\mathcal{R}b$.

A quoi ça sert ?

Exemples



Faire de même avec $\mathcal{R}_2$.

Composée de relations

Définition 1.3.6

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par[4]

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple : $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin^2(x^3)\}$ est une composée.
Exercice 1.3.1 : La composée de relations est associative.

4. Attention à l'ordre dans lequel on écrit les relation $\circ$ se lit "après".

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproques

Définition 1.3.7

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, alors la relation inverse (ou réciproque) de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1} : B \to A$ définie par

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a\mathcal{R}b\}.$$

- Traduire en termes de représentation sagitale,
- Traduire en termes de représentation cartésienne,
- Quels sont les domaines et image de la réciproque (en fonction de ceux de $\mathcal{R}$,
- Quelle est la réciproque de la réciproque,
- Calculer $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ pour les chaussettes.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Restriction

Proposition 1.3.1 (en fait c'est une définition)

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, et si A' est un sous-ensemble de A, alors la restriction de $\mathcal{R}$ à A' est la relation $\mathcal{R}|_{A'} : A' \to B$ définie par

$$\mathcal{R}|_{A'} = \{(a, b) \in A' \times B : a\mathcal{R}b\}.$$

Exemple :
Si $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, $\mathcal{R}|_{[0,+\infty[} = \{(x, y) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R} : y = x^2\}$.
Remarques :

1. La restriction a une influence sur le domaine et l'image de $\mathcal{R}$
2. On aurait pu restreindre l'ensemble d'arrivée.
3. C'est ce qu'on fait souvent en secondaire.

Applications

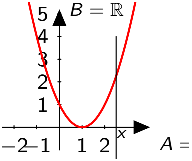
Nous allons définir des relations particulières : les relations de type fonctionnel et applications. Il existe bien d'autres types de relations intéressantes, comme par exemple les relations d'ordre.

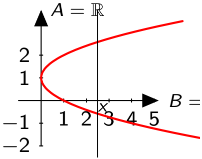
Définition 1.4.1

Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est de type fonctionnel si tout point a de A est en relation avec au plus un élément de B.

Comment traduire “au plus” (unicité) ?

$$(a \in A, b_1, b_2 \in B, a\mathcal{R}b_1, a\mathcal{R}b_2) \Rightarrow b_1 = b_2.$$





P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Applications

Définition 1.4.2

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est de type fonctionnel, alors si $(a, b) \in \mathcal{R}$, on dit que b est l'image de a par $\mathcal{R}$.

Définition 1.4.3

Une relation $\mathcal{R} : A \to B$ est de type application si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. La relation $\mathcal{R}$ est de type fonctionnel ;
2. Le domaine de $\mathcal{R}$ est égal à A.

En résumé : Une relation est de type application si

"Tout point a de A est en relation avec exactement un point de b de B."

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Restriction - Loi de transformation

Proposition 1.4.1

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est de type fonctionnel, alors $\mathcal{R}|_{\mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ est de type application.

Attention : Erreur dans les notes : $\mathcal{R}_4$ est une relation de type fonctionnel, mais pas de type application.
Une notation :

$$f : A \to B : a \mapsto f(a).$$

Elle indique que f est une application de A dans B qui à chaque point a de A **associe** son image $f(a)$.

Toute relation de type application de A dans B définit donc bien une **loi de transformation** de A dans B

Connection avec le point de vue du secondaire.

Définition (Intuitive mais incomplète)

Une application f de A dans B est une “loi de transformation” qui associe à tout point x de A, associe un point $f(x)$ de B.

Nous avons **reconstruit** cette définition :

1. Toute relation de type application donne lieu à une “loi de tranformation”.
2. Toute “loi de transformation” $f : A \to B$ qui tranforme chaque élément x de A en un élément $f(x)$ de B donne lieu à une relation

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

C’est une relation de type application (appelée graphe de f).

Les deux points de vue coexistent, même si un seul est parfaitement défini.

C’est la Proposition 1.4.2.

On note G_f si on veut être sûr de parler de la relation.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Ce qu'on peut dire ou pas

- La fonction $f(x)$... Non
- La fonction $y = f(x)$... Non plus
- La fonction f... oui

Alors,

- Qu'est-ce que $f(x)$? Un élément de B
- Qu'est ce que $y = f(x)$?
  C'est l'équation cartésienne du graphe de f :

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Dans ce cadre, x représente un élément de A.

Composées d'applications

La composée d'applications est une application.

Proposition 1.4.3

La composée de relations de type application est de type application. Plus précisément, si on a $\mathcal{R} : A \to B$, $\mathcal{R}' : B \to C$, $\mathcal{R} = G_f$ et $\mathcal{R}' = G_g$, alors $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ s'écrit $G_{g\circ f}$ où $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, pour tout $a \in A$.

Question : Et la réciproque d'une application ?

1. C'est une relation (comme réciproque d'une relation).
2. Il n'y a aucune raison que ce soit une application.

Alors qu'est-ce qu'on fait ?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Bijections

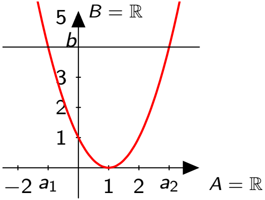
Proposition 1.5.1

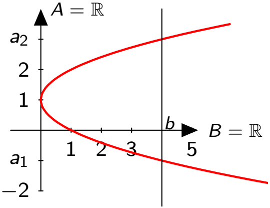
Soit $\mathcal{R} : A \to B$ une relation de type application. Alors $\mathcal{R}^{-1}$ est de type application si, et seulement si, pour tout $b \in B$ il existe un unique $a \in A$ tel que $a\mathcal{R}b$.

Définition 1.5.1

Une application $f : A \to B$ telle que pour tout $b \in B$ il existe un unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$ est une bijection.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$ n'est pas une bijection :





P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Injections et surjections

Définition 1.5.2

Une application $f : A \to B$ est injective (est une injection) si il n'existe pas $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2)$.

Proposition 1.5.2

Une application $f : A \to B$ est injective si, et seulement si, pour tous $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$, alors $a_1 = a_2$.

Attention : Erreur fréquente avec la définition d'une relation de type fonctionnel !

Proposition 1.5.3

Si $f : A \to B$ est une application injective, alors G_f^{-1} est une relation de type fonctionnel.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une dernière proposition et des exemples

Proposition 1.5.4

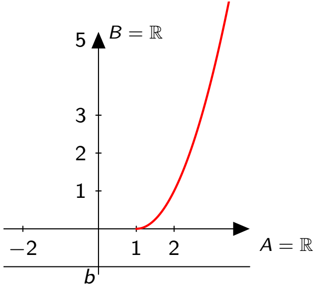
Une application $f : A \to B$ est injective si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation
$$f(x) = b, \ (x \in A)$$
admet au plus une solution.

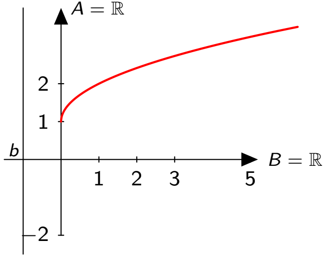
1. L'application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective.
2. L'application $f_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est injective.
3. L'application $f_3 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est injective.
4. Il en va de même pour l'application $f_4 : A \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ dont l'intersection avec la paire $\{-x, x\}$ contient au plus un élément, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est injective.
6. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$ est injective.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Applications surjectives

L'application $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$ admet une relation réciproque qui n'est pas une application :





Définition 1.5.3

Soit $f : A \to B$ une application. L'image de f, notée $Im(f)$ ou $f(A)$ est égale à l'image de G_f. L'application f est surjective (ou est une surjection) si $Im(f) = B$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 1.5.5

Une application $f : A \to B$ est surjective si, et seulement si, on a $\mathrm{dom}(G_f^{-1}) = B$.

Proposition 1.5.6

Une application $f : A \to B$ est surjective si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation

$$f(x) = b, \quad (x \in A)$$

admet au moins une solution.

Proposition 1.5.7

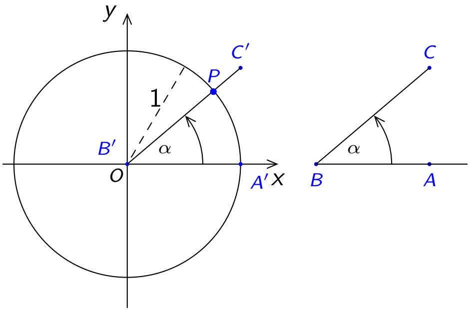
Pour toute application $f : A \to B$, l'application $f : A \to Im(f) = f(A)$ est surjective.

Remarque : Prop équivalente pour l'injectivité ?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques réciproques célèbres en trigonométrie

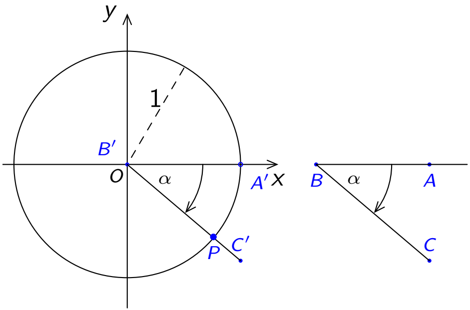
- On se donne un système d'axes orthonormés du plan, d'origine O et d'axes (gradués) x et y ;
- Le *cercle trigonométrique* est cercle ***de rayon 1***, centré à l'origine O ;



Tout angle orienté $\widehat{ABC}$ permet de définir un point P sur le cercle trigonométrique, et vice versa.

Le cercle trigonométrique II

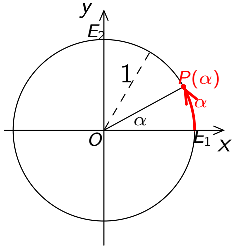
Attention, les angles sont orientés : voyez la situation suivante.

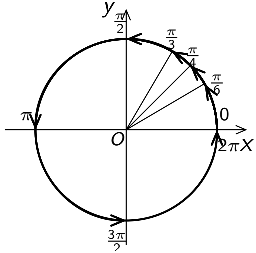


Ici, l'angle orienté $\alpha = \widehat{ABC}$ a une amplitude négative.

Degrés et radians

- Nous avons associé à chaque amplitude α (en degrés) un point P sur le cercle trigonométrique.
- Ce point peut aussi être repéré par la longueur d'arc parcourue (également notée α), entre le point E_1 définissant le repère et le point P ;
- Cette longueur d'arc est comptée positivement si on suit le sens trigonométrique positif et négativement sinon.
- 2π correspond à 360 degrés et “longueur d'arc” (en radians) et “amplitude” (en degrés) sont directement proportionnelles.



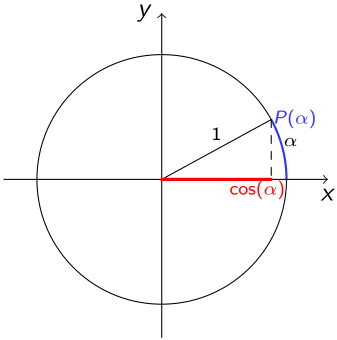


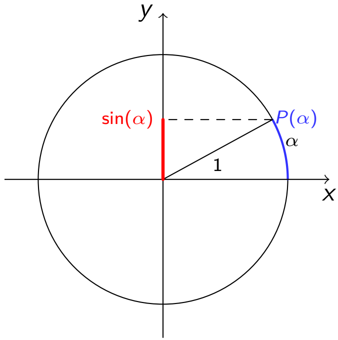
Nombres trigonométriques, définitions I

Soit α l'amplitude d'un angle exprimée en radians ou en degrés. Par définition, les coordonnées du point P correspondant du cercle trigonométrique sont

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

On a donc





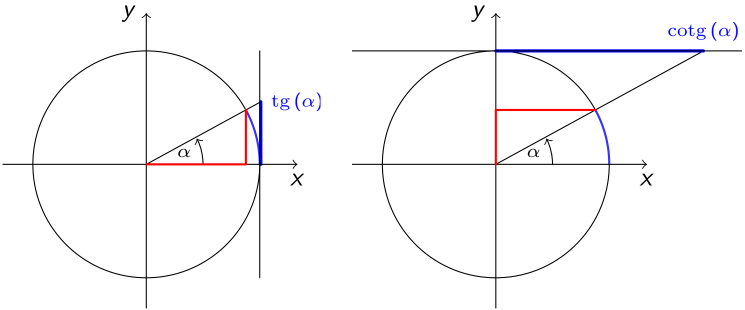
76 Attention, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont des coordonnées et non des longueurs : ce sont des nombres éventuellement négatifs, compris entre -1 et 1.

Nombres trigonométriques, définitions II

On définit la tangente et cotangente de α par

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.}$$

Bien sûr, ces nombres ne sont définis que si le dénominateur est non nul. On peut les représenter de manière géométrique.



Premières propriétés I

Proposition : Relation fondamentale

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la relation fondamentale :

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.}$$

Proposition : 2π-Périodicité

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha).$$

En général, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha).$$

De même, on a

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha) \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha).$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Premières propriétés II

Proposition : Angles opposés

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Proposition : Angles supplémentaires

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Proposition : Angles antisupplémentaires

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

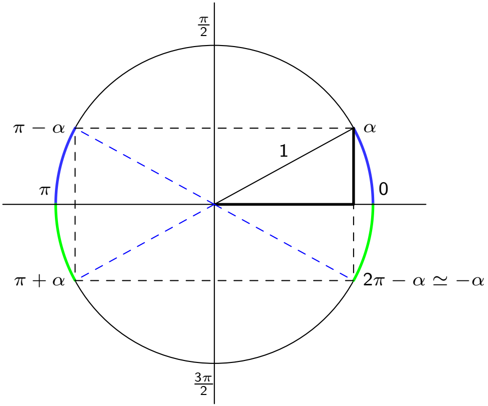
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha),$$

et donc $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha) \quad$ et $\quad \operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une bonne nouvelle : cela se voit

Ces résultats sont dus aux symétries de la figure suivantes, qui préservent les longueurs.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Valeurs particulières

A l'aide des identités que nous venons de montrer, on peut toujours se ramener à un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Certains angles sont fréquemment utilisés. Voici les valeurs des nombres trigonométriques correspondants.

Proposition : valeurs remarquables

On a le tableau de valeurs suivant.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{cotg}(\alpha)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Il est utile de les retenir par coeur. Les valeurs sont $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$;
- On peut toujours les retrouver en traçant le cercle trigonométrique et en repérant les triangles particuliers.

Formules d'addition

Proposition xxx

Pour tous nombres réels α et β, on a

1. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
4. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Formules revues en analyse.
On en déduit les formules de duplication (et de Carnot), ainsi que les formules de Simpson.

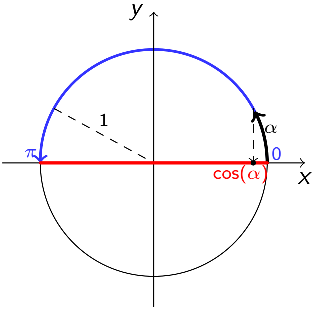
P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

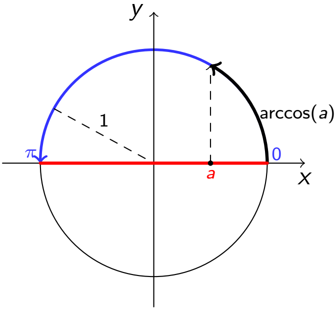
L'arc cosinus

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ n'est pas une bijection. Mais sa restriction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$ en est une.

Définition

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\operatorname{arccos}(a)$.





L'arc cosinus jouit des propriétés suivantes.

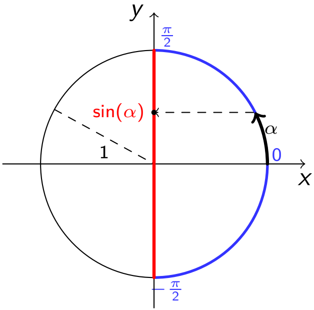
- On a $\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$;

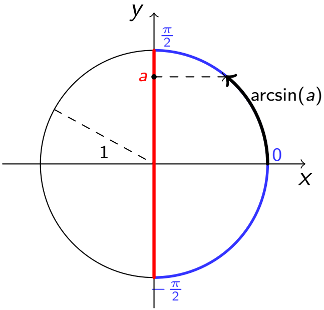
L'arc sinus

La fonction sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ n'est pas une bijection. Mais sa restriction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$ en est une.

Définition

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arcsin(a)$.





La fonction arc sinus a les propriétés suivantes.

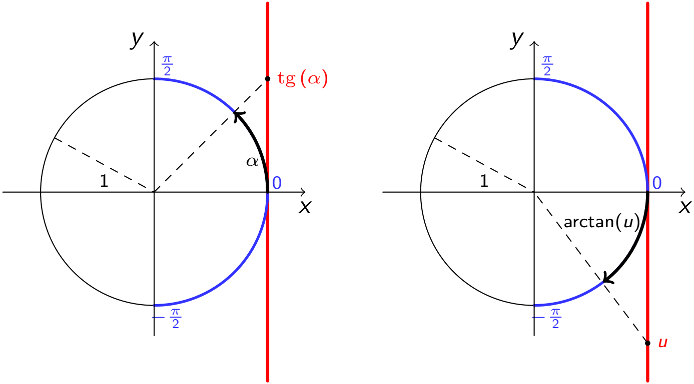
- On a $\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

L'arc tangente

L'application $\mathrm{tg} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{tg}\,(x)$ est une bijection.

Définition

Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\mathrm{tg}\,(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\mathrm{arctg}(a)$.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations trigonométriques

Equations en cosinus

L'équation $\cos(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :
Si $a \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution. Si $a \in [-1, 1]$, on a les solutions :

$$\alpha = \arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = -\arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Equations en sinus

L'équation $\sin(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :
Si $a \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution. Si $a \in [-1, 1]$, on a les solutions :

$$\alpha = \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Equations en tangente

L'équation $\mathrm{tg}\,(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :

$$\alpha = \mathrm{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi + \mathrm{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Propriétés des bijections

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : A \to B$ est une bijection ;
2. L'application $f : A \to B$ est une injection et une surjection.
3. L'application $f : A \to B$ est telle que G_f^{-1} est de type application.

Définition 1.5.4

Soit $f : A \to B$ une bijection. La relation réciproque G_f^{-1} est de type application. On note cette application $f^{-1} : B \to A$, définie par $G_{f^{-1}} = G_f^{-1}$ et on l'appelle application réciproque de f

Proposition 1.5.9

Si $f : A \to B$ est une bijection, alors pour tous $a \in A$, $b \in B$, on a $f(a) = b$ si, et seulement si, $a = f^{-1}(b)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés, suite

Définition 1.5.5

Deux applications f et g sont égales si

1. Elles ont même domaine A ;
2. Pour tout $a \in A$, on a $f(a) = g(a)$.

Pour tout ensemble A, on définit l'application identique de A, notée id_A par $\mathrm{id}_A(a) = a$ pour tout $a \in A$.

C'est un cas particulier de l'égalité des relations.

Proposition 1.5.10

Si $f : A \to B$ est une bijection, alors on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition 1.5.11

La composée de deux bijections est une bijection. Plus précisément, si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des bijections, alors $g \circ f : A \to C$ est une bijection. De plus, on a la relation $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Images et pré-images de sous-ensembles

Définition 1.6.1

Soit $f : A \to B$ une application, soient X un sous-ensemble de A et Y un sous ensemble de B. Alors l'image de X par f est l'ensemble

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

La pré-image de Y par f, ou l'image inverse de Y par f est l'ensemble

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Attention = $f^{-1}(Y)$ existe même si f n'est pas une bijection. Dans le cas où f est une bijection, la définition peut avoir deux significations, qui donne le même résultat.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, alors
$$f([0, \frac{\pi}{2}]) = \{\sin(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = [0, 1].$$
2. Pour la même application, on a
$$\begin{aligned} f^{-1}([0,1]) &= \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \in [0,1]\} \\ &= [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \cdots = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi]. \end{aligned}$$
3. Pour la même application, on a
$$f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geqslant \frac{1}{2}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi].$$
4. Soit $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$. On a
$$p_1^{-1}(]\frac{1}{2}, 1[) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]\frac{1}{2}, 1[\} =]\frac{1}{2}, 1[\times\mathbb{R}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 1.6.1

Soit $f : A \to B$ une application. On a alors

1. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$, pour tous $Y, Z \subset B$;
2. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$, pour tous $Y, Z \subset B$
3. $f(Y \cup Z) = f(Y) \cup f(Z)$, pour tous $Y, Z \subset A$;
4. $f(Y \cap Z) \subset f(Y) \cap f(Z)$, pour tous $Y, Z \subset A$.

En général, la dernière inclusion est stricte.

Proposition 1.6.2

Soit $f : A \to B$ une application. Pour tout $X \subset A$ et tout $Y \subset B$,

1. On a $X \subset f^{-1}(f(X))$, l'égalité ayant lieu notamment si f est injectif ;
2. On a $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$, l'égalité ayant lieu notamment si f est surjectif.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.