Nombres complexes

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Equations du deuxième degré : exemple I

Résolvons l'équation :

$$x^2 - 7 = 2.$$

Equations du deuxième degré : exemple I

Résolvons l'équation :

$$x^2 - 7 = 2.$$

On a

$$x^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}.$$

On note donc $S = \{-3; 3\}$.

Equations du deuxième degré : exemple I

Résolvons l'équation :

$$x^2 - 7 = 2.$$

On a

$$x^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}.$$

On note donc $S = \{-3; 3\}$.
Décortiquons les étapes de la résolution :

$$\begin{array}{lll} x^2 - 7 = 2 & \Leftrightarrow (x^2 - 7) - 2 = 2 - 2 & \text{(existence de } -2\text{)} \\ & \Leftrightarrow x^2 - (7 + 2) = 0 & \text{(associativité)} \\ & \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 & \text{(p.r. distrib. et commut.)} \\ & \Leftrightarrow (x + 3) = 0 \text{ ou } (x - 3) = 0 & \text{(produit nul)} \\ & \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3 & \text{(opposé, associativité)} \end{array}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$3(x+5)^2 = 21$

$\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0$ (opposé)

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$3(x+5)^2 = 21$

$\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0$ (opposé)

$\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0$ (distrib.)

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$$\begin{array}{ll}
3(x+5)^2 = 21 & \\
\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0 & \text{(opposé)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0 & \text{(distrib.)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5) + \sqrt{7}][(x+5) - \sqrt{7}] = 0 & \text{(p.r. : distrib, commut.)}
\end{array}$$

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$$\begin{array}{ll}
3(x+5)^2 = 21 & \\
\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0 & \text{(opposé)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0 & \text{(distrib.)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)+\sqrt{7}][(x+5)-\sqrt{7}] = 0 & \text{(p.r. : distrib, commut.)} \\
\Leftrightarrow (x+5)+\sqrt{7} = 0 \text{ ou } (x+5)-\sqrt{7} = 0 & \text{(produit nul : inverse)}
\end{array}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$$\begin{array}{ll}
3(x+5)^2 = 21 & \\
\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0 & \text{(opposé)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0 & \text{(distrib.)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)+\sqrt{7}][(x+5)-\sqrt{7}] = 0 & \text{(p.r. : distrib, commut.)} \\
\Leftrightarrow (x+5)+\sqrt{7} = 0 \text{ ou } (x+5)-\sqrt{7} = 0 & \text{(produit nul : inverse)} \\
\Leftrightarrow x = -5-\sqrt{7} \text{ ou } x = -5+\sqrt{7} & \text{(neutre, opposé, assoc).}
\end{array}$$

Donc $S = \{-5+\sqrt{7}, -5-\sqrt{7}\}$.

Equations du deuxième degré : exemple II

Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+5)^2 = 21.$$

On a

$$\begin{array}{ll}
3(x+5)^2 = 21 & \\
\Leftrightarrow 3(x+5)^2 - 21 = 0 & \text{(opposé)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0 & \text{(distrib.)} \\
\Leftrightarrow 3[(x+5)+\sqrt{7}][(x+5)-\sqrt{7}] = 0 & \text{(p.r. : distrib, commut.)} \\
\Leftrightarrow (x+5)+\sqrt{7} = 0 \text{ ou } (x+5)-\sqrt{7} = 0 & \text{(produit nul : inverse)} \\
\Leftrightarrow x = -5-\sqrt{7} \text{ ou } x = -5+\sqrt{7} & \text{(neutre, opposé, assoc).}
\end{array}$$

Donc $S = \{-5+\sqrt{7}, -5-\sqrt{7}\}$.

Remarque : on a en fait résolu $3x^2 + 30x = -54$, comme ceci :

$$\begin{aligned}
3x^2 + 30x = -54 &\Leftrightarrow 3x^2 + 30x + 54 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 10x + 18) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3(x^2 + 2.5.x + 25 - 25 + 18) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3[(x+5)^2 - 7] = 0
\end{aligned}$$

Résolution générale

On veut résoudre $ax^2+bx+c=0$, pour $a\neq 0$. On a

$$\begin{array}{rcl} ax^2+bx+c & = & a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)\\ & = & a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ & = & a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{array}$$

où le discriminant [1] Δ vaut b^2-4ac. Si $\Delta\geqslant 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}=(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2$ et

$$ax^2+bx+c=a[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}][x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}].$$

Proposition

1. *si $\Delta>0$: l'équation admet deux solutions distinctes : on a*
$$S=\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}.$$
2. *si $\Delta=0$: l'équation admet une seule solution : $S=\{\frac{-b}{2a}\}$. On dit que la solution $\frac{-b}{2a}$ est double.*
3. *Si $\Delta<0$: l'équation n'admet pas de solution. On note $S=\varnothing$;*

1. Cette expression est aussi appelée réalisant.

Factorisation, somme et produit

Proposition

Si $a \neq 0$ et $\Delta \geqslant 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), et le trinôme correspondant se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus, la somme des solutions vaut $\frac{-b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$.

Remarque : C'est une façon de vérifier rapidement les solutions.

Proposition (Réciproque)

Si n_1 et n_2 sont deux nombres dont la somme est s et le produit p, alors ces nombres sont solutions de l'équation

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Preuve : Il suffit d'exprimer les conditions.

Remarque sur la complétion des carrés

Cette méthode consistant à compléter des carrés parfaits est utile en géométrie. Dans un repère orthonormé, l'équation d'un cercle (pour la distance euclidienne) est donnée par

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2,$$

ou un multiple non nul.

On peut trouver le centre et le rayon du cercle d'équation

$$4x^2 + 4y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

Il n'y a même pas besoin que ce soit un cercle :

$$4x^2 + 2y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

On peut même avoir des doubles produits en xy

$$4x^2 + 4xy + 2y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

Cela permet aussi de factoriser simplement des expressions comme $x^4 + 4$, ou de démontrer que l'expression $7x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$ est positive ou nulle, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

7

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x+2)^2 - (2i)^2 = 0$

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x+2)^2 - (2i)^2 = 0$
- On factorise $(x+2)^2 - (2i)^2 = [(x+2) + 2i][(x+2) - 2i]$ (produits remarquables, distributivité, commutativité)

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x+2)^2 - (2i)^2 = 0$
- On factorise $(x+2)^2 - (2i)^2 = [(x+2)+2i][(x+2)-2i]$ (produits remarquables, distributivité, commutativité)
- L'équation devient $[(x+2)+2i][(x+2)-2i] = 0$, i.e. $[(x+2)+2i] = 0$ ou $[(x+2)-2i] = 0$ (produit nul : neutre et inverse)

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x+2)^2 - (2i)^2 = 0$
- On factorise $(x+2)^2 - (2i)^2 = [(x+2)+2i][(x+2)-2i]$
  (produits remarquables, distributivité, commutativité)
- L'équation devient $[(x+2)+2i][(x+2)-2i] = 0$, i.e.
  $[(x+2)+2i] = 0$ ou $[(x+2)-2i] = 0$
  (produit nul : neutre et inverse)
- On trouve $x = -2-2i$ ou $x = -2+2i$
  (neutre, opposé, associativité)

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \tag{1.1}$$

Elle n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car elle est équivalente à

$$(x+2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x+2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i).(2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x+2)^2 - (2i)^2 = 0$
- On factorise $(x+2)^2 - (2i)^2 = [(x+2) + 2i][(x+2) - 2i]$ (produits remarquables, distributivité, commutativité)
- L'équation devient $[(x+2) + 2i][(x+2) - 2i] = 0$, i.e. $[(x+2) + 2i] = 0$ ou $[(x+2) - 2i] = 0$ (produit nul : neutre et inverse)
- On trouve $x = -2 - 2i$ ou $x = -2 + 2i$ (neutre, opposé, associativité)

On devrait avoir un champ !

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition formelle I

On voudrait définir

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

mais ce n'est pas une définition, car $+$ et i ne sont pas définis !

Définition

On définit l'ensemble des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition formelle I

On voudrait définir

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

mais ce n'est pas une définition, car $+$ et i ne sont pas définis !

Définition

On définit l'ensemble des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

On voudrait avoir une addition et une multiplication ayant de bonnes propriétes :

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + iy + iy' = x + x' + i(y + y'),$$

et

$$(x + iy).(x' + iy') = xx' + xiy + iyx' + iyiy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition formelle II

Définition

On définit l'addition des nombres complexes par

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x, y), (x', y')) \mapsto (x + x', y + y'),$$

et on définit la multiplication par

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y),$$

pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

- Très vite, on ne notera plus le $\cdot$, si aucune confusion n'est possible.
- On garde à l'esprit que ce qui a été défini (x, y) devra correspondre à $x + iy$. On sera donc amené à définir $i = (0, 1)$.
- L'addition dans $\mathbb{C}$ est celle "des vecteurs", de $\mathbb{R}^2$, cela permet de connaître ses propriétés.
- La multiplication a l'air mystérieuse si on oublie ce que l'on a souhaité.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Structure de champ de $\mathbb{C}$

On note 0 l'élément $(0,0)$ de $\mathbb{C}$ et on note 1 l'élément $(1,0)$ de $\mathbb{C}$.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication et des éléments neutres ci-dessus est un champ.

Preuve : A faire.

Etudier au passage la définition d'un champ : 4 propriétés pour l'addition, 4 pour la multiplication, et la distributivité. Seul l'inverse demande des calculs. On se donne $(x,y) \neq (0,0)$ et on cherche (x',y') tel que $(x,y)\cdot(x',y') = 1 = (1,0)$. C'est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xx' - yy' & = & 1 \\ yx' + xy' & = & 0. \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on utilise la méthode de Gauss, par exemple, et on obtient que le système est équivalent à

$$(x',y') = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}).$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, on obtient la même solution.

Plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Proposition

Si à tout nombre réel x on associe le nombre complexe $j(x) = (x, 0)$, alors cela définit une application injective ayant les propriétés suivantes.

1. $j(x + x') = j(x) + j(x')$ *pour tous* $x, x' \in \mathbb{R}$ *;*
2. $j(x.x') = j(x).j(x')$ *pour tous* $x, x' \in \mathbb{R}$ *;*

- Conséquence : en identifiant x à $j(x)$, on peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, et $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, on définit $a.z = j(a).z = (ax, ay)$.

Proposition

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique

$$z = x(1,0) + y(0,1) = x.1 + y.(0,1), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le nombre i

Définition

Nous notons i le nombre complexe $(0, 1)$.[2]

Proposition

Tout nombre complexe (x, y) $(x, y \in \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a $i^2 = -1$.

Définition

Si x, y sont réels, l'écriture $x + iy$ est l'écriture sous *forme algébrique* du nombre complexe (x, y).

On récupère les formules voulues. Il suffit de retenir les propriétés.

Proposition

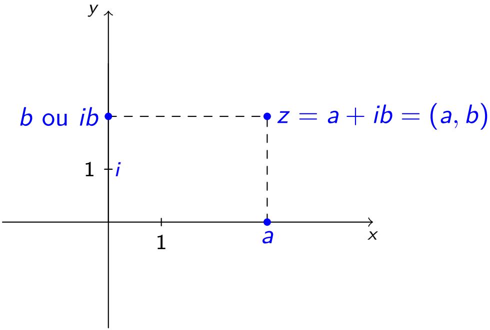
On a, pour tous réels x, x', y, y' :

- $(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$;
- $(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

2. Cette notation est due à L. Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

Représentation cartésienne des nombres complexes

L'idée : on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On utilise la **représentation** de $\mathbb{R}^2$ au moyen d'un repère orthonormé. On parle de plan complexe.



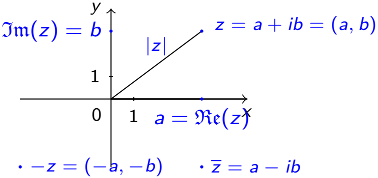
- Attention, les nombres portés sur le deuxième axe ne sont pas réels, mais *imaginaires purs* : si on reporte b sur l'axe des ordonnées, on représente le coupe $(0, b)$ et donc le nombre complexe $ib = (0, b)$.

Nombres associés

Définition

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on définit

1. la partie réelle de z par $\mathfrak{Re}(z) = a$;
2. la partie imaginaire de z par $\mathfrak{Im}(z) = b$; Attention : pas *ib*
3. Le nombre complexe conjugué de z par $\overline{z} = a - ib$;
4. le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$;



Exemples : Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et le conjugué de

1. $z_0 = i$,
2. $z_1 = -2$,
3. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,
4. $z_3 = 1 + i$,
5. $z_4 = 3 + 2i$.

Propriétés

Proposition (Egalité)

Si z_1, z_2 *sont des complexes, on a* $z_1 = z_2$ *ssi* $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{Re}(z_1) & = & \mathfrak{Re}(z_2) \\ \mathfrak{Im}(z_1) & = & \mathfrak{Im}(z_2) \end{array} \right.$

Proposition (Conjugué)

Pour tous nombres complexes z_1 *et* z_2*, on a*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ *et* $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;
2. *Si* $z_2 \neq 0$*, alors* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
3. *Si* $z_1 \neq 0$*, on a* $\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$.

Proposition (Parties réelles et imaginaires)

Pour tout nombre complexe z*,*

1. *On a* $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
2. z *est réel ssi* $\mathfrak{Im}(z) = 0$ *ssi* $z = \overline{z}$;
3. z *est imaginaire pur ssi* $\mathfrak{Re}(z) = 0$ *ssi* $z = -\overline{z}$.

Propriétés - suite

Exemple : Mettre sous forme algébrique les quotients

1. $\frac{3+i}{4-i}$,
2. $\frac{i+5}{i-5}$,
3. $\frac{1}{i}$,
4. $\frac{5+3i}{4i+3}$.

Proposition (Module)

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2

1. $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ *et si* $z_2 \neq 0$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
3. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})$

Proposition (Inégalités)

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2

1. $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$;
2. *On a l'inégalité triangulaire* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
3. *De plus* $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Forme trigonométrique/exponentielle

Définition (Exponentielle complexe)

Si $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

$$e^z = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Remarque importante :

1. Ici l'exponentielle et les fonctions sinus et cosinus sont celles du secondaire, et permettent de définir e^z. Dans le cours d'analyse, on fera sans doute le chemin (correct) en sens inverse.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $e^a = e^a$ (exp réelle), et $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b) = \text{“}cis(b)\text{''}$.

Proposition

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2, on a

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
3. $(e^z)^n = e^{nz}, \forall z \in \mathbb{N}$.
4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ix}| = 1$.*

Formules pour le cosinus et le sinus

Proposition

On a

$$\cos(x) = \mathfrak{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \mathfrak{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Utilisation :

1. Récupérer les formules de Carnot.
2. Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$.
3. Faire de même avec $\sin^3(x)$.
4. Se souvenir des formules d'addition : $\cos(x + y) = \mathfrak{Re}(e^{i(x+y)})$, de même avec le sinus.

Forme exponentielle

Proposition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ et un unique $\rho \in]0, +\infty[$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.

Cette écriture du nombre complexe z est appelée forme exponentielle ou forme trigonométrique de z.

Preuve Pour l'existence, on constate que si $\rho = |z|$, alors $\frac{z}{\rho}$ est de module 1. L'unicité est classique.

Définition

L'angle θ de la proposition précédente est appelé *un argument* de z. Par extension, on appellera aussi argument de z tout angle θ' tel que $\theta' - \theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

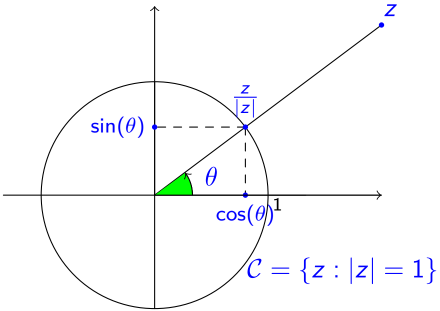
Exemples : Trouver les formes exponentielles de

1. $z_0 = 1 + i$,
2. $z_1 = -1$,
3. $z_2 = 2 + 3i$,
4. $z_3 = -2 - 3i$,
5. $z_4 = 1 + \sqrt{3}i$.

Calculer z_4^6.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une représentation



Proposition

L'application qui à tout $z = (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *associe le couple* (ρ, θ) *est une bijection de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *sur son image* $]0; +\infty[\times[0; 2\pi[$.

Remarque : En géométrie, il s'agit du passage en coordonnées polaires.

Multiplication, et formule de Moivre

Proposition

On a, pour tous $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ *et* $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

1. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
2. $z_1^{-1} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$;
3. $z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Corollaire (Formule de Abraham de Moivre (1667-1754))

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Application : Utiliser cette formule pour obtenir des expressions de $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

Interprétations géométriques

Définissons, pour $z_0 \in \mathbb{C}$:

1. $s_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z + z_0$
2. $m_{z_0}\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto zz_0$

Proposition

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, s_{z_0} est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. C'est aussi le cas pour m_{z_0} si $z_0 \neq 0$.

Généralisation : Si $(G, *, e)$ est un groupe, alors pour tout $g_0 \in G$, $\gamma_{g_0} : G \to G : g \mapsto g_0 * g$ et $\delta_{g_0} : G \to G : g \mapsto g * g_0$ sont des bijections.

Transformations du plan $\mathbb{C}$

- En tant qu'ensembles, on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$,
- On identifie $\mathbb{R}^2$ à un plan au moyen d'un repère cartésien orthonormé d'origine O,
- Alors s_{z_0} et m_{z_0} deviennent des bijections du plan dans lui-même (des transformations).

Transformations du plan $\mathbb{C}$

- En tant qu'ensembles, on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$,
- On identifie $\mathbb{R}^2$ à un plan au moyen d'un repère cartésien orthonormé d'origine O,
- Alors s_{z_0} et m_{z_0} deviennent des bijections du plan dans lui-même (des transformations).

Quelles sont ces bijections ?

Transformations du plan $\mathbb{C}$

- En tant qu'ensembles, on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$,
- On identifie $\mathbb{R}^2$ à un plan au moyen d'un repère cartésien orthonormé d'origine O,
- Alors s_{z_0} et m_{z_0} deviennent des bijections du plan dans lui-même (des transformations).

Quelles sont ces bijections ?

Proposition

La bijection s_{z_0} est une translation de vecteur z_0 (ou $\overrightarrow{Oz_0}$), et m_{z_0} est une similitude (composée d'une rotation d'angle θ_0 et d'une homothétie de rapport ρ_0).

Preuve : Considérer la forme algébrique pour s_{z_0} et la forme trigonométrique pour m_{z_0}.
Remarques La transformation m_{z_0} est linéaire. Elle peut être écrite à l'aide d'une matrice.

Racines carrées et équations du deuxième degré

Définition

Pour tout nombre complexe z, on appelle **une** racine carrée de z tout nombre w tel que $w^2 = z$.

Remarques :

1. Tout nombre complexe z admet au plus deux racines carrées, opposées (parce que $\mathbb{C}$ est un champ).
2. Il est moins facile de privilégier une de ces racines que dans le cas des nombres réels. On évitera donc la notation $\sqrt{z}$, qui fait penser à une application.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées. Le nombre complexe 0 *admet une seule racine carrée, qu'on dira racine double.*

Preuve : 1) Le cas de 0 est trivial. 2) Prendre la forme trigonométrique.

Retour aux équations du deuxième degré

On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où l'inconnue z est complexe, et a, b, c aussi, et où $a \neq 0$.

Proposition

Cette équation admet toujours exactement deux solutions, éventuellement confondues (on dira "comptées avec leur multiplicité"). Elles sont données par la formule $\frac{-b\pm\delta}{2a}$ *où* $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Retour aux équations du deuxième degré

On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où l'inconnue z est complexe, et a, b, c aussi, et où $a \neq 0$.

Proposition

Cette équation admet toujours exactement deux solutions, éventuellement confondues (on dira "comptées avec leur multiplicité"). Elles sont données par la formule $\frac{-b\pm\delta}{2a}$ *où* $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Preuve : On reprend la décomposition

$$az^2 + bz + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

Mais $\Delta = \delta^2$ (toujours), donc $\frac{\Delta}{4a^2} = (\frac{\delta}{2a})^2$. On factorise :

$$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a})(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}).$$

Factorisation, somme et produit

Proposition

Le trinôme du deuxième degré $az^2 + bz + c$ se factorise ***toujours*** *: on a*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

où z_1, z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
De plus, on a $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque : 1) Cela se généralise aux fonctions/équations polynomiales de degré n, pour $n \geqslant 1$. 2) Les formules pour la somme et le produits sont des cas particuliers des formules de Viète.

Exemple :

- résoudre (dans $\mathbb{C}$) $x^2 + 4x + 8 = 0$ et factoriser $x^2 + 4x + 8$
- résoudre (dans $\mathbb{C}$) $(1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$ et factoriser $(1 + i)z^2 + iz - 1$.

Les racines carrées, via la forme algébrique

- Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ On cherche $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tel que $w^2 = z$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Les racines carrées, via la forme algébrique

- Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ On cherche $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tel que $w^2 = z$.
- On écrit l'équation $(x + iy)^2 = a + ib$ et on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array}\right.$$

- Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right.$$

- On trouve $x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$.
- Si $b > 0$, alors $x > 0$ et $y > 0$, ou $x < 0$ et $y < 0$, et on trouve

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$$

- Si $b < 0$, alors on trouve

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

- Si $b = 0$ et $a \geqslant 0$, on trouve $(x, y) = \pm(\sqrt{a}, 0)$, donc $w = \pm\sqrt{a}$
- Si $b = 0$ et $a \leqslant 0$, on trouve $(x, y) = \pm(0, \sqrt{-a})$, donc $w = \pm i\sqrt{-a}$

Exercices :

1. Calculer les deux racines carrées complexes de -1, $i - 1$, $3 + i$.
2. Résoudre complètement l'équation proposée plus haut, et la factorisation.
3. Résoudre $z^4 + z^2 - 12 = 0$, $8z^2 + 4(1 + 2i)z - 3 = 0$.

Le cas des équations à coefficients réels

Proposition

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $ax^2 + bx + c = 0$ est stable par conjugaison.

Preuve :

- Si $\Delta \geqslant 0$, les solutions sont réelles.
- Sinon, elles s'écrivent $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et sont conjuguées l'une de l'autre.

Généralisation :

- Si P est une fonction polynomiale à coefficients réels, alors le résultat reste vrai.
- En fait, dans ce cas, on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Puissances n-èmes et binôme de Newton

Si on veut calculer une puissance n-ème d'un nombre complexe, soit on utilise la forme trigonométrique, soit la forme algébrique. Dans ce cas, on est amené à calculer $(a+ib)^n$. C'est la n-ème puissance d'un binôme.

Définition

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit le coefficient binomial

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarques :

- On pose $0! = 1$, donc $C_n^0 = C_n^n = 1$.
- Le nombre C_n^k est le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts, l'ordre n'ayant pas d'importance.

Triangle de Pascal et binôme de Newton

Proposition

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Preuve : Calculer.

Proposition (Formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres complexes w et z, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k w^k z^{n-k}.$$

Preuve : Par récurrence, ou développer

$$(w+z)^n = (w+z)\cdots(w+z).$$

Remarque : Cette formule est vraie dans d'autres structures que $\mathbb{C}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines n-èmes

Definition

Une racine n-ème d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet n racines n-èmes distinctes.

Preuve : Il suffit de considérer l'équation, sous forme exponentielle.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines n-èmes

Definition

Une racine n-ème d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet n racines n-èmes distinctes.

Preuve : Il suffit de considérer l'équation, sous forme exponentielle. Les racines n-èmes de $\rho e^{i\theta}$ sont alors

$$\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Definition

Les racines n-èmes de l'unité sont les nombres z tels que $z^n = 1$. Elles sont données par

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques propriétés

Proposition

- *Les racines n-èmes de l'unité sont les puissances successives de* $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
- *Si* $n \geqslant 2$*, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle.*
- *Les raines n-èmes de l'unité ont un module égal à 1.*
- *Les racines n-èmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.*
- *L'ensemble des racines n-èmes de l'unité est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}_0, \cdot, 1)$*, noté* U_n.
- *L'ensemble des racines n-èmes de* $w \in \mathbb{C}$ *s'écrit* $\{w_0\omega_n^k : k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$*, si* w_0 *est une racine n-ème de* w.

Pour aller plus loin : Le groupe $(U_n, \cdot, 1)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}_m, +, 0)$.

Racines n-èmes primitives

Définition

Une racine n-ème primitive de l'unité est une racine de l'unité ω telle que n soit le plus petit $t \in \mathbb{N}_0$ tel que $\omega^t = 1$.

Exemple : -1 n'est pas une racine quatrième primitive de l'unité. Mais i et $-i$ le sont.

Proposition

Si ω est une racine n-ème primitive de l'unité, alors

$$U_n = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n = 1\}.$$

Proposition

Si $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ est une racine primitive, alors k et n n'ont pas de facteur commun.

Remarque : La réciproque est vraie.