

Nombres complexes

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Equations du deuxième degré : exemple II

Réolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x + 5)^2 = 21.$$

On a

$$3(x + 5)^2 = 21$$

$$\Leftrightarrow 3(x + 5)^2 - 21 = 0 \quad (\text{opposé})$$

$$\Leftrightarrow 3[(x + 5)^2 - 7] = 0 \quad (\text{distrib.})$$

$$\Leftrightarrow 3[(x + 5) + \sqrt{7}][(x + 5) - \sqrt{7}] = 0 \quad (\text{p.r. : distrib, commut.})$$

$$\Leftrightarrow (x + 5) + \sqrt{7} = 0 \text{ ou } (x + 5) - \sqrt{7} = 0 \quad (\text{produit nul : inverse})$$

$$\Leftrightarrow x = -5 - \sqrt{7} \text{ ou } x = -5 + \sqrt{7} \quad (\text{neutre, opposé, assoc.})$$

Donc $S = \{-5 + \sqrt{7}, -5 - \sqrt{7}\}$.

Remarque : on a en fait résolu $3x^2 + 30x = -54$, comme ceci :

$$3x^2 + 30x = -54 \Leftrightarrow 3x^2 + 30x + 54 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 10x + 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 25 - 25 + 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3[(x + 5)^2 - 7] = 0$$

Equations du deuxième degré : exemple I

Réolvons l'équation :

$$x^2 - 7 = 2.$$

On a

$$x^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}.$$

On note donc $S = \{-3; 3\}$.

Décortiquons les étapes de la résolution :

$$x^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 7) - 2 = 2 - 2 \quad (\text{existence de } -2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (7 + 2) = 0 \quad (\text{associativité})$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \quad (\text{p.r. distrib. et commut.})$$

$$\Leftrightarrow (x + 3) = 0 \text{ ou } (x - 3) = 0 \quad (\text{produit nul})$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3 \quad (\text{opposé, associativité})$$

2

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résolution générale

On veut résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, pour $a \neq 0$. On a

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

où le **discriminant**¹ Δ vaut $b^2 - 4ac$. Si $\Delta \geq 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$ et

$$ax^2 + bx + c = a \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right].$$

Proposition

① si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes : on a

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$$

② si $\Delta = 0$: l'équation admet une seule solution : $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$. On dit que la solution $\frac{-b}{2a}$ est **double**.

③ Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de solution. On note $S = \emptyset$;

1. Cette expression est aussi appelée réalisant.

3

Factorisation, somme et produit

Proposition

Si $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), et le trinôme correspondant se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus, la somme des solutions vaut $-\frac{b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$.

Remarque : C'est une façon de vérifier rapidement les solutions.

Proposition (Réciproque)

Si n_1 et n_2 sont deux nombres dont la somme est s et le produit p , alors ces nombres sont solutions de l'équation

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Preuve : Il suffit d'exprimer les conditions.

5

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Remarque sur la complétion des carrés

Cette méthode consistant à compléter des carrés parfaits est utile en géométrie. Dans un repère orthonormé, l'équation d'un cercle (pour la distance euclidienne) est donnée par

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2,$$

ou un multiple non nul.

On peut trouver le centre et le rayon du cercle d'équation

$$4x^2 + 4y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

Il n'y a même pas besoin de ce soit un cercle :

$$4x^2 + 2y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

On peut même avoir des doubles produits en xy

$$4x^2 + 4xy + 2y^2 + 6x - 12y - 25 = 0.$$

Cela permet aussi de factoriser simplement des expressions comme $x^4 + 4$, ou de démontrer que l'expression $7x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$ est positive ou nulle, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

6

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres complexes : introduction

Considérons l'équation

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \quad (1.1)$$

Elle n'admet pas de solution dans \mathbb{R} car elle est équivalente à

$$(x + 2)^2 + 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x + 2)^2 - (-4) = 0.$$

Pour la résoudre, il faudrait un nombre δ (ou plusieurs) tel(s) que $\delta^2 = -4$. On étend les nombres réels.

- On ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- On a alors $(2i) \cdot (2i) = -4$ (mult. par 2, associativité, commutativité)
- L'équation (1.1) devient $(x + 2)^2 - (2i)^2 = 0$
- On factorise $(x + 2)^2 - (2i)^2 = [(x + 2) + 2i][(x + 2) - 2i]$ (produits remarquables, distributivité, commutativité)
- L'équation devient $[(x + 2) + 2i][(x + 2) - 2i] = 0$, i.e. $[(x + 2) + 2i] = 0$ ou $[(x + 2) - 2i] = 0$ (produit nul : neutre et inverse)
- On trouve $x = -2 - 2i$ ou $x = -2 + 2i$ (neutre, opposé, associativité)

On devrait avoir un champ !

7

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition formelle I

On voudrait définir

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

mais ce n'est pas une définition, car $+$ et i ne sont pas définis !

Définition

On définit l'ensemble des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

On voudrait avoir une addition et une multiplication ayant de bonnes propriétés :

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + iy + iy' = x + x' + i(y + y'),$$

et

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + xiy + iyx' + iyiy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

8

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition formelle II

Définition

On **définit** l'addition des nombres complexes par

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : ((x, y), (x', y')) \mapsto (x + x', y + y'),$$

et on **définit** la multiplication par

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y),$$

pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

- Très vite, on ne notera plus le \cdot , si aucune confusion n'est possible.
- On garde à l'esprit que ce qui a été défini (x, y) devra correspondre à $x + iy$. On sera donc amené à **définir** $i = (0, 1)$.
- L'addition dans \mathbb{C} est celle "des vecteurs", de \mathbb{R}^2 , cela permet de connaître ses propriétés.
- La multiplication a l'air mystérieuse si on oublie ce que l'on a souhaité.

9

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Structure de champ de \mathbb{C}

On note 0 l'élément $(0, 0)$ de \mathbb{C} et on note 1 l'élément $(1, 0)$ de \mathbb{C} .

Proposition

L'ensemble \mathbb{C} muni de l'addition et de la multiplication et des éléments neutres ci-dessus est un champ.

Preuve : A faire.

Etudier au passage la définition d'un champ : 4 propriétés pour l'addition, 4 pour la multiplication, et la distributivité. Seul l'inverse demande des calculs. On se donne $(x, y) \neq (0, 0)$ et on cherche (x', y') tel que $(x, y) \cdot (x', y') = 1 = (1, 0)$. C'est équivalent à

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0. \end{cases}$$

C'est un système linéaire. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on utilise la méthode de Gauss, par exemple, et on obtient que le système est équivalent à

$$(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, on obtient la même solution.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

10

Plongement de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

Proposition

Si à tout nombre réel x on associe le nombre complexe $j(x) = (x, 0)$, alors cela définit une application injective ayant les propriétés suivantes.

- 1 $j(x + x') = j(x) + j(x')$ pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$;
- 2 $j(x \cdot x') = j(x) \cdot j(x')$ pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$;

- Conséquence : en identifiant x à $j(x)$, on peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, et $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, on définit $a \cdot z = j(a) \cdot z = (ax, ay)$.

Proposition

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique

$$z = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot (0, 1), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

11

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le nombre i

Définition

Nous notons i le nombre complexe $(0, 1)$.²

Proposition

Tout nombre complexe (x, y) ($x, y \in \mathbb{R}$) s'écrit de manière unique $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a $i^2 = -1$.

Définition

Si x, y sont réels, l'écriture $x + iy$ est l'écriture sous *forme algébrique* du nombre complexe (x, y) .

On récupère les formules voulues. Il suffit de retenir les propriétés.

Proposition

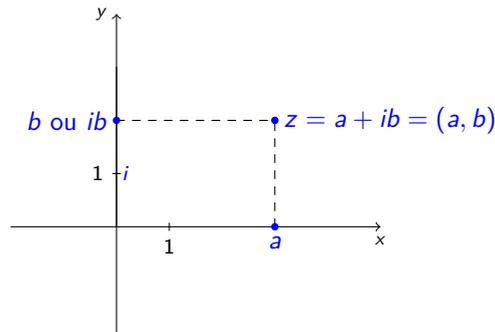
On a, pour tous réels x, x', y, y' :

- $(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$;
- $(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

2. Cette notation est due à L. Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

Représentation cartésienne des nombres complexes

L'idée : on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On utilise la **représentation** de \mathbb{R}^2 au moyen d'un repère orthonormé. On parle de **plan complexe**.



- Attention, les nombres portés sur le deuxième axe ne sont pas réels, mais **imaginaires purs** : si on reporte b sur l'axe des ordonnées, on représente le couple $(0, b)$ et donc le nombre complexe $ib = (0, b)$.

13

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition (Egalité)

Si z_1, z_2 sont des complexes, on a $z_1 = z_2$ ssi $\begin{cases} \Re(z_1) = \Re(z_2) \\ \Im(z_1) = \Im(z_2) \end{cases}$

Proposition (Conjugué)

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a

- 1 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ et $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;
- 2 Si $z_2 \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
- 3 Si $z_1 \neq 0$, on a $\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$.

Proposition (Parties réelles et imaginaires)

Pour tout nombre complexe z ,

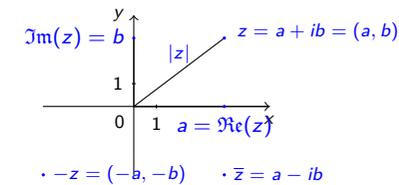
- 1 On a $\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$;
- 2 z est réel ssi $\Im(z) = 0$ ssi $z = \overline{z}$;
- 3 z est imaginaire pur ssi $\Re(z) = 0$ ssi $z = -\overline{z}$.

Nombres associés

Définition

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), on définit

- 1 la partie réelle de z par $\Re(z) = a$;
- 2 la partie imaginaire de z par $\Im(z) = b$; **Attention : pas ib**
- 3 Le nombre complexe conjugué de z par $\overline{z} = a - ib$;
- 4 le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$;



Exemples : Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et le conjugué de

- 1 $z_0 = i$,
- 2 $z_1 = -2$,
- 3 $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,
- 4 $z_3 = 1 + i$,
- 5 $z_4 = 3 + 2i$.

14

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés - suite

Exemple : Mettre sous forme algébrique les quotients

- 1 $\frac{3+i}{4-i}$,
- 2 $\frac{i+5}{i-5}$,
- 3 $\frac{1}{i}$,
- 4 $\frac{5+3i}{4i+3}$.

Proposition (Module)

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2

- 1 $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$;
- 2 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
- 3 $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \overline{z_2})$

Proposition (Inégalités)

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2

- 1 $|\Re(z)| \leq |z|$, $|\Im(z)| \leq |z|$;
- 2 On a l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- 3 De plus $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

16

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Forme trigonométrique/exponentielle

Définition (Exponentielle complexe)

Si $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

$$e^z = e^a(\cos(b) + i \sin(b)).$$

Remarque importante :

- 1 Ici l'exponentielle et les fonctions sinus et cosinus sont celles du secondaire, et permettent de définir e^z . Dans le cours d'analyse, on fera sans doute le chemin (correct) en sens inverse.
- 2 Si $a, b \in \mathbb{R}$, $e^a = e^a$ (exp réelle), et $e^{ib} = \cos(b) + i \sin(b) = \text{"cis}(b)\text{"}$.

Proposition

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 , on a

- 1 $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
- 2 $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
- 3 $(e^z)^n = e^{nz}$, $\forall z \in \mathbb{N}$.
- 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ix}| = 1$.

Forme exponentielle

Proposition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ et un unique $\rho \in]0, +\infty[$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.

Cette écriture du nombre complexe z est appelée forme exponentielle ou forme trigonométrique de z .

Preuve Pour l'existence, on constate que si $\rho = |z|$, alors $\frac{z}{\rho}$ est de module 1. L'unicité est classique.

Définition

L'angle θ de la proposition précédente est appelé *un argument* de z . Par extension, on appellera aussi argument de z tout angle θ' tel que $\theta' - \theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples : Trouver les formes exponentielles de

- 1 $z_0 = 1 + i$,
- 2 $z_1 = -1$,
- 3 $z_2 = 2 + 3i$,
- 4 $z_3 = -2 - 3i$,
- 5 $z_4 = 1 + \sqrt{3}i$.

Calculer z_4^6 .

Formules pour le cosinus et le sinus

Proposition

On a

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin(x) = \Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

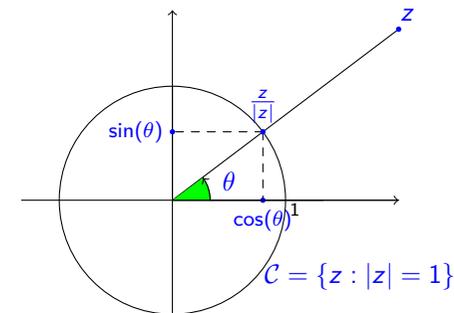
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Utilisation :

- 1 Récupérer les formules de Carnot.
- 2 Exprimer $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$.
- 3 Faire de même avec $\sin^3(x)$.
- 4 Se souvenir des formules d'addition : $\cos(x + y) = \Re(e^{i(x+y)})$, de même avec le sinus.

18

Une représentation



Proposition

L'application qui à tout $z = (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ associe le couple (ρ, θ) est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur son image $]0; +\infty[\times]0; 2\pi[$.

Remarque : En géométrie, il s'agit du passage en coordonnées polaires.

20

19

Multiplication, et formule de Moivre

Proposition

On a, pour tous $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

- 1 $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- 2 $z_1^{-1} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$;
- 3 $z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Corollaire (Formule de Abraham de Moivre (1667-1754))

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Application : Utiliser cette formule pour obtenir des expressions de $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

21

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Interprétations géométriques

Définissons, pour $z_0 \in \mathbb{C}$:

- 1 $s_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z + z_0$
- 2 $m_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto zz_0$

Proposition

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, s_{z_0} est une bijection de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . C'est aussi le cas pour m_{z_0} si $z_0 \neq 0$.

Généralisation : Si $(G, *, e)$ est un groupe, alors pour tout $g_0 \in G$, $\gamma_{g_0} : G \rightarrow G : g \mapsto g_0 * g$ et $\delta_{g_0} : G \rightarrow G : g \mapsto g * g_0$ sont des bijections.

22

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Transformations du plan \mathbb{C}

- En tant qu'ensembles, on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$,
- On identifie \mathbb{R}^2 à un plan au moyen d'un repère cartésien orthonormé d'origine O ,
- Alors s_{z_0} et m_{z_0} deviennent des bijections du plan dans lui-même (des transformations).

Quelles sont ces bijections ?

Proposition

La bijection s_{z_0} est une translation de vecteur z_0 (ou $\overrightarrow{Oz_0}$), et m_{z_0} est une similitude (composée d'une rotation d'angle θ_0 et d'une homothétie de rapport ρ_0).

Preuve : Considérer la forme algébrique pour s_{z_0} et la forme trigonométrique pour m_{z_0} .

Remarques La transformation m_{z_0} est linéaire. Elle peut être écrite à l'aide d'une matrice.

23

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines carrées et équations du deuxième degré

Définition

Pour tout nombre complexe z , on appelle **une** racine carrée de z tout nombre w tel que $w^2 = z$.

Remarques :

- 1 Tout nombre complexe z admet au plus deux racines carrées, opposées (parce que \mathbb{C} est un champ).
- 2 Il est moins facile de privilégier une de ces racines que dans le cas des nombres réels. On évitera donc la notation \sqrt{z} , qui fait penser à une application.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées. Le nombre complexe 0 admet une seule racine carrée, qu'on dira racine double.

Preuve : 1) Le cas de 0 est trivial. 2) Prendre la forme trigonométrique.

24

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Retour aux équations du deuxième degré

On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où l'inconnue z est complexe, et a, b, c aussi, et où $a \neq 0$.

Proposition

Cette équation admet toujours exactement deux solutions, éventuellement confondues (on dira "comptées avec leur multiplicité"). Elles sont données par la formule $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Preuve : On reprend la décomposition

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Mais $\Delta = \delta^2$ (toujours), donc $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$. On factorise :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right).$$

25

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Les racines carrées, via la forme algébrique

- Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) On cherche $w = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tel que $w^2 = z$.
- On écrit l'équation $(x + iy)^2 = a + ib$ et on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

- Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- On trouve $x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$.
- Si $b > 0$, alors $x > 0$ et $y > 0$, ou $x < 0$ et $y < 0$, et on trouve

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$$

27

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Factorisation, somme et produit

Proposition

Le trinôme du deuxième degré $az^2 + bz + c$ se factorise **toujours** : on a

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

où z_1, z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

De plus, on a $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque : 1) Cela se généralise aux fonctions/équations polynomiales de degré n , pour $n \geq 1$. 2) Les formules pour la somme et le produits sont des cas particuliers des formules de Viète.

Exemple :

- résoudre (dans \mathbb{C}) $x^2 + 4x + 8 = 0$ et factoriser $x^2 + 4x + 8$
- résoudre (dans \mathbb{C}) $(1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$ et factoriser $(1 + i)z^2 + iz - 1$.

26

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

- Si $b < 0$, alors on trouve

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right).$$

- Si $b = 0$ et $a \geq 0$, on trouve $(x, y) = \pm(\sqrt{a}, 0)$, donc $w = \pm\sqrt{a}$
- Si $b = 0$ et $a \leq 0$, on trouve $(x, y) = \pm(0, \sqrt{-a})$, donc $w = \pm i\sqrt{-a}$

Exercices :

- 1 Calculer les deux racines carrées complexes de $-1, i - 1, 3 + i$.
- 2 Résoudre complètement l'équation proposée plus haut, et la factorisation.
- 3 Résoudre $z^4 + z^2 - 12 = 0, 8z^2 + 4(1 + 2i)z - 3 = 0$.

28

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas des équations à coefficients réels

Proposition

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de $ax^2 + bx + c = 0$ est stable par conjugaison.

Preuve :

- Si $\Delta \geq 0$, les solutions sont réelles.
- Sinon, elles s'écrivent $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et sont conjuguées l'une de l'autre.

Généralisation :

- Si P est une fonction polynomiale à coefficients réels, alors le résultat reste vrai.
- En fait, dans ce cas, on a $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

29

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Triangle de Pascal et binôme de Newton

Proposition

Pour tout $n \geq 1$ et tout k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Preuve : Calculer.

Proposition (Formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres complexes w et z , et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(w + z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k w^k z^{n-k}.$$

Preuve : Par récurrence, ou développer

$$(w + z)^n = (w + z) \cdots (w + z).$$

31

Remarque : Cette formule est vraie dans d'autres structures que \mathbb{C} .

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Puissances n -èmes et binôme de Newton

Si on veut calculer une puissance n -ème d'un nombre complexe, soit on utilise la forme trigonométrique, soit la forme algébrique. Dans ce cas, on est amené à calculer $(a + ib)^n$. C'est la n -ème puissance d'un binôme.

Définition

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarques :

- On pose $0! = 1$, donc $C_n^0 = C_n^n = 1$.
- Le nombre C_n^k est le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts, l'ordre n'ayant pas d'importance.

30

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines n -èmes

Définition

Une racine n -ème d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet n racines n -èmes distinctes.

Preuve : Il suffit de considérer l'équation, sous forme exponentielle. Les racines n -èmes de $\rho e^{i\theta}$ sont alors

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Définition

Les racines n -èmes de l'unité sont les nombres z tels que $z^n = 1$. Elles sont données par

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

32

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques propriétés

Proposition

- Les racines n -èmes de l'unité sont les puissances successives de $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n -èmes de l'unité est nulle.
- Les racines n -èmes de l'unité ont un module égal à 1.
- Les racines n -èmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.
- L'ensemble des racines n -èmes de l'unité est un sous-groupe de $(\mathbb{C}_0, \cdot, 1)$, noté U_n .
- L'ensemble des racines n -èmes de $w \in \mathbb{C}$ s'écrit $\{w_0\omega_n^k : k \in \{0, \dots, n-1\}\}$, si w_0 est une racine n -ème de w .

Pour aller plus loin : Le groupe $(U_n, \cdot, 1)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$.

33

Racines n -èmes primitives

Définition

Une racine n -ème primitive de l'unité est une racine de l'unité ω telle que n soit le plus petit $t \in \mathbb{N}_0$ tel que $\omega^t = 1$.

Exemple : -1 n'est pas une racine quatrième primitive de l'unité. Mais i et $-i$ le sont.

Proposition

Si ω est une racine n -ème primitive de l'unité, alors

$$U_n = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^n = 1\}.$$

Proposition

Si $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est une racine primitive, alors k et n n'ont pas de facteur commun.

34

Remarque : La réciproque est vraie.