Bijections classiques, cardinal, relations d'équivalence

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Quelques bijections évidentes

Définition 4.1.1

1. Les nombres pairs sont les éléments de $\mathbb{N}$ qui sont divisibles par 2. On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble de ces nombres.
2. Les nombres impairs sont les éléments de $\mathbb{N}$ qui ne sont pas divisibles par 2. On note I l'ensemble de ces nombres.

Proposition 4.1.1

Les ensembles $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ et I sont en bijection.

Proposition 4.1.2

Les ensembles $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Remarque : c'est l'hôtel de Hilbert (Proposé par David Hilbert, Mathématicien Allemand 1862-1943).
Preuve : Une bijection est donnée par

$$f : \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N} : (a,b) \mapsto 2a+b.$$

Un peu plus délicat

Proposition 4.1.3

Les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Preuve : C'est la bijection de Cantor (1845-1918) :

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j.$$

Définition 4.1.2

Un ensemble A est fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}_0$, tel que A soit en bijection avec $\{0,\ldots,n-1\}$. Si $A = \varnothing$, le cardinal de A, noté $|A|$ ou $\sharp A$ est nul. Si A est en bijection avec $\{0,\ldots,n-1\}$, alors le cardinal de A est n.

Remarques :

1. On a une bijection évidente entre $\{0,\ldots,n-1\}$ et $\{1,\ldots,n\}$;
2. C'est ce que l'on fait quand on compte des objets ;
3. Il faut cependant que si $\{0,\ldots,n-1\}$ et $\{0,\ldots,m-1\}$ sont en bijection, alors $m = n$.

Le cardinal des ensembles finis est bien défini

Lemme 4.1.1

Si $f : A \to B$ est une bijection, pour tout $A' \subset A$, $f|_{A'} : A' \to f(A')$ est une bijection.

Preuve : Voir la définition.

Lemme 4.1.2

L'ensemble vide n'est en bijection avec aucun ensemble non vide.

Preuve : Il ne peut y avoir qu'une seule application.

Lemme 4.1.3

Pour tout $n \geqslant 2$, et pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, l'ensemble $\{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i\}$ est en bijection avec $\{0,\ldots,n-2\}$.

Preuve : Définir la bijection en comptant/numérotant.

Proposition 4.1.4

Si $m, n \in \mathbb{N}_0$ sont tels que $\{0, \ldots, n-1\}$ et $\{0, \ldots, m-1\}$ soient en bijection, alors on a $m = n$. En particulier le cardinal d'un ensemble fini est bien défini.

Preuve : Récurrence sur n.

Définition 4.1.3 (Ensembles dénombrables)

Un ensemble A est infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Par extension, un ensemble A est dénombrable s'il existe une injection $i : A \to \mathbb{N}$; i.e. si il existe une bijection entre A et une partie de $\mathbb{N}$.

Théorème 4.1.1 (Cantor)

L'ensemble E des suites à termes dans $\{0, 1\}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$.

Proposition 4.1.5

Avec les notations du théorème précédent, l'application $f : E \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : s \mapsto \{n \in \mathbb{N} : s_n = 1\}$ est une bijection.

Donc $\mathbb{N}$ n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Partitions d'un ensemble

Définition 4.2.3

Soit A un ensemble. Une partition de A est une famille de sous-ensembles de A deux à deux disjoints et dont l'union est égale à A.

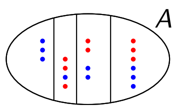
Exemples :

1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ est une partition de A.
2. Soit $A = \mathbb{N}$. Posons $A_0 = 2\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres pairs et $A_1 = I$, l'ensemble des nombres impairs. Alors $\{A_0, A_1\}$ est une partition de $\mathbb{N}$.
3. Cet exemple peut être généralisé à $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ où $A_i = \{i + km : k \in \mathbb{N}\}$.
4. Soit $A = \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définissons $E_x = \{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Alors $\{E_x : x \in \mathbb{R}\}$ est une partition de $\mathbb{R}^2$.

Question : L'ensemble vide...

Partitions d'un ensemble fini et comptages

On s'intéresse au cadinal d'un ensemble A : 1,2,3 comptez :



On regroupe les éléments selon un "critère". Ex : les bleus d'un côté, les rouges de l'autre. Par paquets verticaux, par paquets horizontaux. A chaque fois, on réalise une partition de l'ensemble A (en sous-ensembles non vides).

Proposition

Si $\{A_1, \ldots, A_m\}$ est une partition de A, alors $|A| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|$.

Preuve : Se ramener à $m = 2$, quitte à faire une récurrence. Etablir une bijection pour $A_1 \cup A_2$.

Intérêt : C'est la "règle de la somme" en analyse combinatoire. De plus, si $|A_i| = n, \forall i \leqslant m$ alors $|A| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| = nm$. C'est la "règle du produit" en analyse combinatoire.

Qu'est-ce que ce "critère"

On a en fait défini des relations :

- Avoir la même "abscisse"
- Avoir la même "ordonnée"
- Avoir la même couleur
- ...

1. Ces relations sont appelées relations d'équivalence : les points sont équivalents pour ce critère.
2. Ces relations permettent de partitionner/diviser l'ensemble.
3. Quel est le quotient, puisqu'on divise ?
4. C'est ce qui reste quand on identifie les points équivalents pour le critère, il reste les sous ensembles de la partition.
5. Si la relation est "avoir la même couleur", le quotient est {Bleu, Rouge}
6. Oui mais bon, on ne peut pas le faire pour toutes les relations.

A-t-on le droit d'identifier des éléments différents ?

C'est une opération que vous avez déjà rencontrée dans vos cours de mathématique. Voici deux exemples :

Les fractions :

- Les fractions : $\frac{1}{2}$ est-il égal à $\frac{2}{4}$?
- Qu'est-ce que $\frac{1}{2}$?
- On devrait l'écrire $(1;2)$, (ou $(2;1)$). Alors $(1;2) \neq (2;4)$, mais on dit que ces couples sont équivalentes dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$.
- Si on considère comme critère "avoir la même quantité de gâteau à manger", on **décide** de ne plus les distinguer.

Les vecteurs (libres) :

- Un vecteur lié (en A) du plan π est un **couple** de points (A, B).
- Les vecteurs liés (A, B) et (C, D) sont donc égaux si $A = C$ et $B = D$.
- Mais on a des raisons de déclarer des vecteurs égaux.
- Les vecteurs liés (A, B) et (C, D) sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme (convexe), ou s'ils sont équipollents à un même troisième couple.
- Ils représentent alors le même vecteur **libre**.

La définition I

Les relations sont définies à partir de partitions. De plus, elles vont donner lieu à l'égalité, il faut qu'elles se comportent comme elle.

Définition 4.2.1

Soit A un ensemble. Une relation $\mathcal{R} : A \to A$ est une relation d'équivalence si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Elle est *réflexive* : on a $a\mathcal{R}a$ pour tout $a \in A$;
2. Elle est *symétrique* : pour tous $a, b \in A$, si $a\mathcal{R}b$, alors $b\mathcal{R}a$;
3. Elle est *transitive* : pour tous $a, b, c \in A$, si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$, alors $a\mathcal{R}c$.

Exemples :

1. Si A est un ensemble, l'égalité est une relation d'équivalence.
2. Sur $\mathbb{R}$, la relation définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 2k\pi$ est une relation d'équivalence ;
3. La relation "avoir la même parité" dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence ;
4. Les relations modulaires dans $\mathbb{Z}$ sont des relations d'équivalence.

Rem. : Nous allons reconstruire $\mathbb{Z}$ au chapitre suivant.

La définition II

Définition 4.2.2

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble A.

- Pour tout $a \in A$, la classe d'équivalence de a, notée $[a]_{\mathcal{R}}$ ou $[a]$ est l'ensemble des éléments équivalents à a.
- On a donc $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : b\mathcal{R}a\}$, c'est un sous-ensemble de A.
- Le quotient de A par $\mathcal{R}$, noté $A/\mathcal{R}$ est l'ensemble formé par les classes d'équivalence :

$$A/\mathcal{R} = \{[a] : a \in A\}.$$

  Ici, $[a]$ est un point du quotient $A/\mathcal{R}$.
- L'élément $a \in A$ est appelé un représentant de $[a]$.
- L'application $\pi : A \to A/\mathcal{R} : a \mapsto [a]$ est appelée projection canonique. Elle est surjective, mais rarement injective.

Toute partition donne lieu à une relation d'équivalence.

Proposition 4.2.2

Soit A un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ une partition (I fini ou infini) de A par des sous-ensembles non vides. Il existe une unique relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont les sous-ensembles A_i.

1. **Unicité :** Etant donné $x \in A$, on connaît la classe de x. Cela fixe la relation, $z\mathcal{R}t \Leftrightarrow \exists i_0 \in I : z, t \in A_{i_0}$.
2. **Existence :** La relation proposée ci-dessus est une relation d'équivalence. Ses classes sont exactement les ensembles A_i donnés par la partition.

Toute relation d'équivalence donne lieu à une partition.

Lemme 4.2.1

Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors pour tous $a, a' \in A$, on a $[a] = [a']$ si, et seulement si $a\mathcal{R}a'$.

Preuve : 1) On a $a \in [a] = [a']$. 2) Deux inclusions.

Proposition 4.2.1

Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, vues comme sous-ensembles de A, forment une partition de A (par des sous-ensembles non vides).

Preuve : L'union des classes vaut A, 2) Les classes distinctes sont disjointes (contraposée).
Remarque : Les deux constructions ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

Retour à un problème connu

Problème : Comment rendre l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ bijective.
On peut le faire facilement :

- on restreint l'ensemble d'arrivée à $[0; +\infty[$
- on restreint l'ensemble de départ à $[0; +\infty[$
- ou $]-\infty, 0]$,
- ou $(\mathbb{Q} \cap [0, +\infty[) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]-\infty, 0[)$,...
- Il suffit de choisir $A \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sharp(A \cap \{-x, x\}) = 1.$$

Problème : Rendre cette construction "naturelle", unique.
Idée : Déclarer que x et $-x$ sont égaux, dans un nouvel ensemble quotient. On notera $[x]$ le point unique correspondant.
Idée intuitive : On colle donc, plutôt que de couper.
On définit une nouvelle application $\widetilde{f} : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{R} : [x] \mapsto x^2$.

Applications définies sur les quotients

L'idée : définir $g([x])$ par son comportement voulu sur x :

1. Exemple des interrupteurs à 5 états :
   0 : éteint, 1 : faible, 2 : moyen, 3 : tamisé, 4 : fort et 5 : éteint.
   Dans le quotient, on a $[2] = [7]$. On dit que 2 et 7 sont des représentants de la même classe. On veut définir
   $$f : \mathbb{N}/\mathcal{R} \to \mathbb{N} : [x] \mapsto x^3.$$
   Est-ce correct ?
2. Avec les mêmes notations, peut-on définir
   $$f : \mathbb{N}/\mathcal{R} \to \mathbb{N}/\mathcal{R} : [x] \mapsto [x^3].$$
   Oui, l'image d'une classe, bien que définie à l'aide d'un représentant, est indépendante de celui-ci.
3. Toujours avec les mêmes notations, on peut être tenté de définir
   $$g : \mathbb{N}/\mathcal{R} \to \mathbb{N}/\mathcal{R} : [x] \mapsto [|\sin(\frac{\pi}{2}x)|]$$
   Cette définition n'est pas correcte.

Oui, mais bon, on pourrait faire autrement, non ?

Non...

1. Soit $g : A/\mathcal{R} \to B$ est une application.
2. Alors $f : A \to B : a \mapsto g \circ \pi(a)$ (où π est la projection canonique) est une application.
3. On a $g([x]) = f(x)$. Donc g est définie à partir d'une application.
4. L'application f est constante sur les classes (d'équivalence).

Conclusion : Toute application définie sur le quotient $A/\mathcal{R}$ est définie à partir d'une application définie sur A. Cette application doit être constante sur les classes.

Relations d'équivalence : le cas de l'application "carré"

Comment rendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ bijective ?

1. On prend l'image de f comme ensemble d'arrivée, elle devient surjective.
2. On définit la relation $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. C'est une relation d'équivalence. La classe de x est précisément $\{x, -x\}$ (vue comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$).
3. On passe au quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, et on définit une application sur le quotient
$$\widetilde{f} : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{R} : [x] \mapsto x^2.$$
4. Toutes les solutions proposées "en coupant" sont en bijection avec le quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Les définitions, et le théorème

Définition 4.2.4

Soient A, B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A.

1. On dit qu'une application $f : A \to B$ passe au quotient $A/\mathcal{R}$ s'il existe une application $\widetilde{f} : A/\mathcal{R} \to B$ telle que $\widetilde{f}([a]) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
2. On dit qu'une application $f : A \to B$ est constante sur les classes de $\mathcal{R}$ si la condition
$$a\mathcal{R}a' \Rightarrow f(a) = f(a')$$
est satisfaite pour tous $a, a' \in \mathcal{R}$.

Proposition 4.2.3

Soient A, B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Une application $f : A \to B$ passe au quotient si, et seulement si, elle est constante sur les classes de $\mathcal{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

On a réglé le problème d'injectivité !

Théorème 4.2.1

Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur A par $a\mathcal{R}a'$ si, et seulement si $f(a) = f(a')$. Alors f passe au quotient en une application bijective $\widetilde{f} : A/\mathcal{R} \to f(A)$.

1. **Preuve :**
   1. l'application f passe au quotient ;
   2. L'application $\widetilde{f}$ est injective ;
   3. L'application $\widetilde{f}$ est surjective.
2. A appliquer à
$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$
3. Dessiner un diagramme commutatif.
4. Appliquer à l'opérateur de dérivation D sur les fonctions dérivables sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.