1. Logique et ensembles, exercices

1. On note P, Q des assertions. Démontrer à l'aide de tables de vérité l'équivalence logique
$$(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q),$$
où P et Q sont des assertions quelconques
Traduire cette équivalence quand P est "Il pleut" et Q est "je porte un chapeau".
2. Démontrer l'équivalence logique suivante
$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P),$$
où P et Q sont des assertions quelconques ;
Traduire cette équivalence quand P est "Il pleut" et Q est "je porte un chapeau".
3. Démontrer l'équivalence logique suivante $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$, où P et Q sont des assertions ;
4. Montrer que si P, Q er R sont des assertions, alors on a
$$(P \Rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R).$$
Peut-on échanger les rôles de Q et R ? Dans tous les cas, voir ce que cela veut dire avec P : "il pleut à 8h", Q : "j'emporte un parapluie" et R : "je mets mon chapeau."
5. Sachant que tous les vendredis, je mets un pull rouge et sachant que j'ai un pull rouge, que peut-on logiquement conclure ? Pourquoi ? Peut-on le démontrer ?
6. Nier : "Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs"
7. Nier : "Tous les professeurs de maths aux yeux bleus seront riches et prendront leur retraite à 55 ans" ;
8. Nier : "Il pleut ou il y a du vent" ;
9. Si en Belgique, tous les 3 février il neige, et si aujourd'hui, il ne neige pas, que peut-on logiquement conclure ? Pourquoi ?
10. Est-il équivalent de dire "s'il fait beau, je sors" et "s'il ne fait pas beau, je ne sors pas" ?
11. Même question pour "je sors si et seulement si il fait beau" et "je ne sors pas si et seulement si il ne fait pas beau".
12. Est-il équivalent de dire "si je suis prof de math, je suis petit ou je donne bien cours" et "si je suis prof de math et si je ne suis pas petit, alors je donne bien cours" ?
13. Sachant que si il a plu hier ou si les muguets sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content, que peut-on déduire du fait que le jardinier n'est pas content ?
    (a) Il n'a pas plu mais les muguets sont en fleurs
    (b) Il n'a pas plu ou les muguets ne sont pas en fleurs
    (c) Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs
    (d) Il a plu mais les muguets ne sont pas en fleurs
    (e) On ne peut rien déduire.
14. Sachant que si il a plu hier ou si les muguets sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content, que peut-on déduire du fait que le jardinier est content ?
    (a) Il n'a pas plu mais les muguets sont en fleurs
    (b) Il n'a pas plu ou les muguets ne sont pas en fleurs

(c) Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs

(d) Il a plu mais les muguets ne sont pas en fleurs

(e) On ne peut rien déduire.

15. On note P, Q et R des assertions. Démontrer que l'assertion composée $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ est logiquement équivalente à l'assertion $(\neg R) \Rightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$. Suggestion : utiliser l'exercice 1 ou l'exercice **??** et un théorème du cours.

    Traduisez ces deux assertions quand P est "on est jeudi", Q : "il pleut" et R : "je porte un chapeau".

16. On note P, Q et R des assertions. Démontrer que l'assertion composée $(P \vee Q) \Rightarrow R$ est logiquement équivalente à l'assertion $(\neg R) \Rightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$.

    Traduisez ces deux assertions quand P est "on est jeudi", Q : "il pleut" et R : "je porte un chapeau".

17. Démontrer le théorème sur les ensembles.

18. Ecrire en extension l'ensemble suivant :

$$C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ est multiple de 4 et de 6, } n \leqslant 36\}.$$

19. Ecrire en compréhension l'ensemble suivant.

$$D = \{3, 5, 7, 9, \ldots, 29\}.$$

20. Démontrer l'égalité entre ensembles

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

où A, B, C sont des sous-ensembles d'un ensemble X, à l'aide de tables de vérités.

21. Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre que pour tous ensembles A, B, C, on a

    (a) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$,

    (b) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$,

    (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

    (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

    (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

22. Soient des ensembles quelconques A, B et C. Répondre par vrai ou faux.

    (a) On a toujours $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

    (b) On a toujours $(C \setminus A) \setminus B = C \setminus (A \setminus B)$.

    (c) On a toujours $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

    (d) L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 3$ est vraie.

    (e) L'assertion $x > 0 \Rightarrow y < 3$ est équivalente à l'assertion $y \geqslant 3 \Rightarrow x \leqslant 0$.

23. Soient des ensembles A, B, C. Sachant que $A \cap B \subset C$, quelle propriété peut-on déduire parmi celles qui suivent ?

    (a) $(A \setminus B) \cap C = \varnothing$ (b) $(A \setminus C) \cap B = \varnothing$ (c) $(C \setminus A) \cap B = \varnothing$ (d) $(C \setminus B) \cap A = \varnothing$

24. Parmi les propositions suivantes, déterminez celle qui est équivalente à l'assertion "Si on est en Belgique, alors il pleut ou il fait trop chaud"

    (a) "Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas et il ne fait pas trop chaud"

    (b) "Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas ou il ne fait pas trop chaud"

    (c) "S'il ne pleut pas et s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique"

    (d) "S'il ne pleut pas ou s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique"