1. Logique et ensembles, exercices

1. On note P, Q des assertions. Démontrer à l'aide de tables de vérité l'équivalence logique

$$(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q),$$

où P et Q sont des assertions quelconques
Traduire cette équivalence quand P est "Il pleut" et Q est "je porte un chapeau".
On écrit la table de vérité pour traiter tous les cas possibles :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

On constate que les assertions considérées ont toujours la même valeur de vérité. Elles sont donc logiquement équivalentes.
S'il pleut alors je porte un chapeau veut dire la même chose que il ne pleut pas ou je porte un chapeau.

2. Démontrer l'équivalence logique suivante

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P),$$

où P et Q sont des assertions quelconques ;
Traduire cette équivalence quand P est "Il pleut" et Q est "je porte un chapeau".
On écrit la table de vérité pour traiter tous les cas possibles :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

On conclut comme ci-dessus. On pouvait aussi transformer les deux implications en $\vee$ en utilisant l'exercice précédent.
"S'il pleut alors je porte un chapeau" veut dire la même chose que "Si je ne porte pas de chapeau, alors il ne pleut pas".

3. Démontrer l'équivalence logique suivante $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$, où P et Q sont des assertions ;
On écrit comme d'habitude. Voici la table.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

4. Montrer que si P, Q er R sont des assertions, alors on a

$$(P \Rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R).$$

Peut-on échanger les rôles de Q et R ? Dans tous les cas, voir ce que cela veut dire avec P : “il pleut à 8h”, Q : “j'emporte un parapluie” et R : “je mets mon chapeau.”
On écrit les 8 possibilités dans la table :

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow (Q \vee R))$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

On peut échanger les rôles. S'il pleut à 8 heures, alors j'emporte un parapluie ou je mets un chapeau. S'il pleut à 8 heures et si je n'emporte pas de parapluie, alors je mets un chapeau.

5. Sachant que tous les vendredis, je mets un pull rouge et sachant que j'ai un pull rouge, que peut-on logiquement conclure ? Pourquoi ? Peut-on le démontrer ?

   On ne peut rien conclure : j'ai le droit de mettre un pull rouge les autres jours. On peut le voir en écrivant la table de $P, Q, P \Rightarrow Q$, pour P : on est vendredi, Q je mets un pull rouge. Il y a deux cas où $P \Rightarrow Q$ est vrai et où Q est vrai. Dans le premier P est vrai, dans le second P est faux. Donc, on ne peut rien conclure à propos de P.

6. Nier : “Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs”

   Il existe une écurie dans laquelle il y a un cheval qui n'est pas noir.

7. Nier : “Tous les professeurs de maths aux yeux bleus seront riches et prendront leur retraite à 55 ans” ;

   Il existe un professeur de maths aux yeux bleus qui ne sera pas riche ou ne prednra pas sa retraite à 55 ans.

8. Nier : “Il pleut ou il y a du vent” ;

   Il ne pleut pas et il n'y a pas de vent.

9. Si en Belgique, tous les 3 février il neige, et si aujourd'hui, il ne neige pas, que peut-on logiquement conclure ? Pourquoi ?

   On peut conclure qu'on n'est pas en Belgique ou qu'on n'est pas le 3 février. Utiliser par exemple l'exercice 2.

10. Est-il équivalent de dire “s'il fait beau, je sors” et “s'il ne fait pas beau, je ne sors pas” ? Non

11. Même question pour “je sors si et seulement si il fait beau” et “je ne sors pas si et seulement si il ne fait pas beau”. Oui

12. Est-il équivalent de dire “si je suis prof de math, je suis petit ou je donne bien cours” et “si je suis prof de math et si je ne suis pas petit, alors je donne bien cours” ? Oui, voir l'exercice 4.

13. Sachant que si il a plu hier ou si les muguets sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content, que peut-on déduire du fait que le jardinier n'est pas content ?

    On utilise $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (\neg R) \Rightarrow (\neg(P \vee Q))$:

    (a) Il n'a pas plu mais les muguets sont en fleurs
    (b) Il n'a pas plu ou les muguets ne sont pas en fleurs
    (c) ♡ Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs
    (d) Il a plu mais les muguets ne sont pas en fleurs

(e) On ne peut rien déduire.

14. Sachant que si il a plu hier ou si les muguets sont en fleurs, alors le jardinier de mon voisin est content, que peut-on déduire du fait que le jardinier est content ?

    (a) Il n'a pas plu mais les muguets sont en fleurs
    (b) Il n'a pas plu ou les muguets ne sont pas en fleurs
    (c) Il n'a pas plu et les muguets ne sont pas en fleurs
    (d) Il a plu mais les muguets ne sont pas en fleurs
    (e) ♡ On ne peut rien déduire.

    Le jardinier peut aussi être content pour une autre raison.

15. On note P, Q et R des assertions. Démontrer que l'assertion composée $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ est logiquement équivalente à l'assertion $(\neg R) \Rightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$. Suggestion : utiliser l'exercice 1 ou l'exercice 2 et un théorème du cours.
    Traduisez ces deux assertions quand P est "on est jeudi", Q : "il pleut" et R : "je porte un chapeau".
    On a, par l'exercice 2, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg R) \Rightarrow (\neg(P \wedge Q))$, et on sait aussi que $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
    "Si on est jeudi et s'il pleut alors je mets un chapeau" veut dire la même chose que "Si je ne mets pas de chapeau, alors on n'est pas jeudi ou il ne pleut pas".

16. On note P, Q et R des assertions. Démontrer que l'assertion composée $(P \vee Q) \Rightarrow R$ est logiquement équivalente à l'assertion $(\neg R) \Rightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$.
    Traduisez ces deux assertions quand P est "on est jeudi", Q : "il pleut" et R : "je porte un chapeau".
    On a, par l'exercice 2, $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (\neg R) \Rightarrow (\neg(P \vee Q))$, et on sait aussi que $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
    Pour la traduction : d'une part, si on est jeudi ou s'il pleut, alors je mets un chapeau, d'autre part, si je ne mets pas de chapeau, on n'est pas jeudi et il ne pleut pas.

17. Démontrer le théorème (vu au cours) sur les ensembles.
    Faire des diagrammes de Venn, utiliser la logique, ou démontrer à chaque fois deux inclusions.

18. Ecrire en extension l'ensemble suivant :

$$C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ est multiple de 4 et de 6, } n \leqslant 36\}.$$

    $\{0; 12; 24; 36\}$

19. Ecrire en compréhension l'ensemble suivant.

$$D = \{3, 5, 7, 9, \ldots, 29\}.$$

    Ensemble des nombres impairs compris entre 3 et 29, inclusivement.

20. Démontrer l'égalité entre ensembles

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

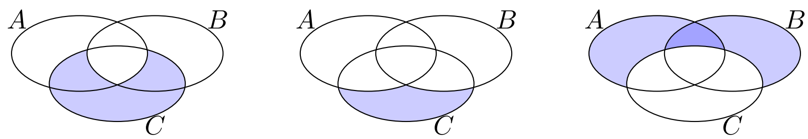
    où A, B, C sont des sous-ensembles d'un ensemble X, à l'aide de tables de vérités.
    On écrit les assertions exprimant l'appartenance aux trois ensembles, et on construit la table, comme d'habitude.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \setminus B$	$x \in (A \setminus B) \cap C$	$(A \cap C)$	$(B \cap C)$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0

On constate que les deux assertions sont équivalentes.

21. Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre que pour tous ensembles A, B, C, on a
    (a) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$,
    (b) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$,
    (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
    (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
    (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

    Voici les diagrammes que l'on obtient pour les trois premières égalités. Je vous laisse les autres.



22. Soient des ensembles quelconques A, B et C. Répondre par vrai ou faux.
    (a) On a toujours $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Vrai
    (b) On a toujours $(C \setminus A) \setminus B = C \setminus (A \setminus B)$. Faux
    (c) On a toujours $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Faux
    (d) L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 3$ est vraie. Vrai
    (e) L'assertion $x > 0 \Rightarrow y < 3$ est équivalente à l'assertion $y \geqslant 3 \Rightarrow x \leqslant 0$. Vrai

23. Soient des ensembles A, B, C. Sachant que $A \cap B \subset C$, quelle propriété peut-on déduire parmi celles qui suivent ?

    (a) $(A \setminus B) \cap C = \varnothing$ (b) ♡ $(A \setminus C) \cap B = \varnothing$ (c) $(C \setminus A) \cap B = \varnothing$ (d) $(C \setminus B) \cap A = \varnothing$

24. Parmi les propositions suivantes, déterminez celle qui est équivalente à l'assertion “Si on est en Belgique, alors il pleut ou il fait trop chaud”
    (a) “Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas et il ne fait pas trop chaud”
    (b) “Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas ou il ne fait pas trop chaud”
    (c) ♡ “S'il ne pleut pas et s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique”
    (d) “S'il ne pleut pas ou s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique”