

# Nombres et algèbre, exercices

1. Effectuer les produits et réduire ( $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ ) :

- |                                 |  |                         |
|---------------------------------|--|-------------------------|
| (a) $3x - 2y - (4x + 2y)$ ;     | (e) $6x - 3y + (x - 2y)$ ;                     | (i) $(2x - 1)(y + 2)$ ; |
| (b) $-(-3x + 2y) + 2(y - 2x)$ ; | (f) $x + a(x + b) - b(a - x)$ ;                | (j) $(x + a)(-x + b)$ ; |
| (c) $(-3 + 4x)(3 + 4x)$ ;       | (g) $-(-3x + 4y - 5z)$ ;                       | (k) $(2x - 1)^2$ ;      |
| (d) $(x + 1)^3$ ;               | (h) $(-3) \cdot (2x - y) + 4 \cdot (2x + y)$ ; | (l) $(3x + 2)^2$ .      |

2. Démontrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;           | (d) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ; |
| (b) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ ;     | (e) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ;   |
| (c) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ; | (f) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .   |

3. Factoriser les expressions suivantes

- |                                      |                                  |                                    |
|--------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| (a) $y^2 + 2y$ ;                     | (g) $(2x + 3)^2 - 49$ ;          | (m) $2 - 4a^2 + 4ab - b^2$ ;       |
| (b) $3x + 21$ ;                      | (h) $(t+1)(t-3) + (t+1)(2t+3)$ ; | (n) $-121 + y^2$ ;                 |
| (c) $x^2 + 4xy + 4y^2$ ;             | (i) $4x^2 - 9$ ;                 | (o) $3x^3y^2 + 6x^2y^3 - 18x^2y^2$ |
| (d) $(x + 3)(x - 2) + (x + 3)$ ;     | (j) $36x^2 - 121$ ;              | (p) $x^3 - xa^2$                   |
| (e) $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$ ; | (k) $3x + 5x^2$ ;                | (q) $(2x - 5)^2 - (x - 7)^2$       |
| (f) $4x^3 - 9xy^2$ ;                 | (l) $4x - 3x^2$ ;                |                                    |

4. Réduire au même dénominateur et simplifier les expressions suivantes (supposées définies) :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (a) $\frac{ax-a}{x+1} - \frac{ax+a}{x-1}$                    | (c) $\frac{a-b}{3} + \frac{b-a}{5} + \frac{8ab}{15(a-b)}$                          | (e) $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} - \frac{2a^2}{a^2-b^2}$ |
| (b) $\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1} + \frac{2a^2}{a^2-1}$ | (d) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{4x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$ | (f) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} - \frac{b-a}{a^2-b^2}$  |

5. Donner l'expression décimale des nombres suivants :

- |                            |  |                         |                          |
|----------------------------|--|-------------------------|--------------------------|
| (a) $3,245 \cdot 10^3$     | (c) $-10^{-3} \cdot (-4,32)$                     | (e) $0,052 \cdot 10^7$  | (g) $7,89 \cdot 10^9$    |
| (b) $0,0032 \cdot 10^{-3}$ | (d) $(1,3 \cdot 10^4) \cdot (1,1 \cdot 10^{-2})$ | (f) $0,0012 \cdot 10^4$ | (h) $0,00234 \cdot 10^7$ |

6. Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

- |                          |                         |                              |  |
|--------------------------|-------------------------|------------------------------|--|
| (a) 23 000 000           | (d) 384000              | (g) $0,0042 \cdot 10^{-5}$   |  |
| (b) $63,4 \cdot 10^{-4}$ | (e) 732 milliards       | (h) $0,0000024 \cdot 10^7$   |  |
| (c) 0,000034             | (f) 0,00000000000000015 | (i) $2\,341\,000 \cdot 10^8$ |  |

7. Evaluer les expressions et simplifier (tout est supposé défini,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ )

- |  |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|
| (a) $(\frac{3}{4})^{-2}$                           | (f) $(27)^{\frac{2}{3}}$                      | (l) $\frac{x^{-6}y^4z^6}{z^4y^2x^{-8}}$           | (q) $\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}{\sqrt[4]{2}}$ | (v) $(\frac{1}{9})^{\frac{5}{2}}$                 |
| (b) $\frac{(-3x)^{-6}}{(2x)^{-7}}$                 | (g) $(8)^{-\frac{2}{3}}$                      | (m) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$                    | (r) $(16)^{\frac{3}{4}}$                        | (w) $\frac{1}{\sqrt[3]{0,008}}$                   |
| (c) $\sqrt{\frac{25}{121}}$                        | (h) $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}$           | (n) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$                    | (s) $(81)^{-\frac{1}{2}}$                       | (x) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ |
| (d) $\sqrt[4]{256}$                                | (i) $(-3x^2)^5$                               | (o) $\sqrt[3]{144}\sqrt[3]{12}$                   | (t) $(\frac{27}{125})^{-\frac{2}{3}}$           | (y) $64^{-\frac{2}{3}}$                           |
| (e) $\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ | (j) $-((-2)^3)^2$                             | (p) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$ | (u) $(\frac{1}{25})^{-\frac{3}{2}}$             |   |
|  | (k) $\frac{x^{-2}y^4z^{-6}}{z^{-9}y^2x^{-4}}$ |   |   |   |

8. Résoudre (dans  $\mathbb{R}$ ) les équations

- |                   |                           |                          |
|-------------------|---------------------------|--------------------------|
| (a) $ x - 2  = 7$ | (b) $ x - 1  =  x - 2 $ . | (c) $ x + 2  =  2x - 3 $ |
|-------------------|---------------------------|--------------------------|

9. Résoudre les équations suivantes (on cherche  $x, y, t \in \mathbb{R}$ , et  $A, a, b$  sont des nombres) :

- |                            |                           |   |
|----------------------------|---------------------------|---|
| (a) $6x + 2 = 0$ ;         | (d) $0x = 17$ ;           | (g) $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{4x-7}{4} + 1$ |
| (b) $2(3x - 4) = 6x + 8$ ; | (e) $17x = 0$ ;           | (h) $\frac{x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = 2$                   |
| (c) $1 - Ay = 5 + y$ ;     | (f) $3x + 10 = 5x - 90$ ; | (i) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{2}$                       |

10. Dans une salle de la bibliothèque, un tiers des étudiants ont un livre de mathématiques, un quart ont un livre de biologie. Les autres, 10 étudiants, ne font rien. Combien y a-t-il d'élèves dans la salle ?

11. Trouvez 3 nombres naturels consécutifs dont la somme est égale à 984.

12. En 2013, un père a 43 ans et son fils 24. En quelle année l'âge du père a-t-il été ou sera-t-il le double de l'âge du fils ?

13. Résoudre (pour  $x, y \in \mathbb{R}$ ) les équations du second degré suivantes, si possible,

- |                           |                           |                                   |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| (a) $3x^2 - 8x + 3 = 0$ ; | (c) $2y^2 = 16y - 18$ ;   | (e) $5(x+1)(2x-1) = 10x^2 - 2x$ ; |
| (b) $4x^2 - 2 = 3x$ ;     | (d) $y^2 - 4y + 13 = 0$ ; | (f) $6x^2 + 3x - 12 = 0$ .        |

14. Deux trains  $A$  et  $B$  partent en même temps d'une même gare, l'un vers le nord et l'autre vers l'est. Le train  $B$  se déplace à  $5km/h$  de plus que le train  $A$ . Si, après 2 heures, ils sont à  $50km$  de distance l'un de l'autre, trouve la vitesse de chaque train.

15. La vitesse de sortie d'un canon à électrons est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{2eU - TS}{m} - v_0^2}$$

Exprimer le nombre  $U$  en fonctions des autres nombres apparaissant dans cette relation.

16. Trois personnes se partagent une somme de 1 900 €. La seconde reçoit 70 € de plus que la première. La part de la troisième est égale au double de la part de la première moins 150 €. Calculer la part de chaque personne.

17. Les membres d'un groupe se partagent les frais d'une excursion en autobus qui coûte 540 €. Cinq des personnes ne peuvent finalement pas y participer, ce qui augmente le coût pour les autres de 1,50 € par personne. Combien de personnes ont fait le voyage ?

18. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- (a)  $-2(2t - 3) \leq -4(t + 2)$  (e)  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$   
 (b)  $t^2 - 49 \geq 0$  (f)  $x^2 - x + 12 < 0$   
 (c)  $2(3t - 1) < -3(t - 2) + 1$  (g)  $\frac{4-3x}{1-x} \leq 0$   
 (d)  $2(3 - 3y) - 2y \leq 3y - 2$  (h)  $\frac{3}{x+2} \geq 1 - x$

19. J'organise une excursion. Je veux louer un car et je contacte deux agences.

— L'agence  $A$  demande 150 euros de base fixe plus 0.5 euros le kilomètre.

— L'agence  $B$  demande 200 euros de base fixe plus 0.25 euros le kilomètre.

Jusqu'à quelle distance est-il préférable de choisir l'agence  $A$  ?

20. Au cours d'un voyage, une moitié de la distance est franchie à la vitesse moyenne de 80 km/h, l'autre moitié à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne du voyage ?

21. Soient  $a, b, c, d$  des nombres strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, supposées définies, laquelle est égale à l'opposé de l'inverse de  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  ?

- (a)  $\frac{bd}{bc-ad}$  (b)  $\frac{bd}{ad-bc}$  (c)  $\frac{bc-ad}{bd}$  (d)  $\frac{ad-bc}{bd}$

22. Parmi les expressions suivantes (supposées définies, et où  $x \in \mathbb{R}$ ), déterminez celle qui est égale à  $\frac{2x+4}{2x^2+8x+8}$ .

- (a)  $\frac{1}{2x^2+6}$  (b)  $\frac{1}{9x+2}$  (c)  $\frac{2}{x+6}$  (d)  $\frac{1}{x+2}$

23. Sachant que les nombres réels  $a, b, c$  non nuls sont liés par la relation  $\frac{1}{a} = 2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$ , comment le nombre  $c$  s'exprime-t-il nécessairement en fonction des autres nombres (toutes les expressions sont supposées définies) ?

- (a)  $\frac{2ab}{2a-b}$  (b)  $\frac{2a-b}{2ab}$  (c)  $\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}\right)^{-1}$  (d)  $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}\right)^{-1}$

24. Que vaut la racine carrée de  $0,0009 \times 10^{-2}$  ?

- (a) 0,00003 (b) 0,0003 (c) 0,003 (d) 0,03

25. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation  $x^2 - 5632x + 1133407 = 0$  ?

- (a)  $\{209, -5423\}$  (b)  $\{209, -5422\}$  (c)  $\{209, 5422\}$  (d)  $\{209, 5423\}$

26. Une équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) admet pour solutions  $x = 2$  et  $x = -3$ . Que vaut le nombre  $\frac{bc}{a^2}$  ?

- (a) -6 (b) -3 (c) 3 (d) 6

27. Deux nombres naturels consécutifs ont un produit qui excède leur somme de 55 unités. Quelle est la somme de leurs carrés ?

- (a) 34 (b) 113 (c) 145 (d) 85

28. En décembre dernier, le prix du pull que je voulais m'acheter avait mystérieusement augmenté de 20%. Heureusement, à la fin janvier, le commerçant a dû afficher une ristourne de 40% sur ce nouveau prix. Quelle était la ristourne réelle sur le prix initial du pull.

- (a) 20%                      (b) 28%                      (c) 40%                      (d) une autre réponse

29. J'achète un téléphone à 80 euros TVA (taxe sur la valeur ajoutée) comprise. Le taux de TVA sur ce produit est de 21 %. Quel est le prix de ce téléphone hors TVA ?

- (a)  $80 - \frac{21}{100}$  euros              (b)  $80 \times \frac{79}{100}$  euros              (c)  $80 \times \frac{100}{121}$  euros              (d)  $80 \times \frac{121}{100}$  euros

30. Je place un capital de 6500 euros sur un compte en banque. Après un an, je possède 7020 euros. Quel est le taux d'intérêt annuel en pourcents ?

- (a)  $\frac{7020}{6500} - 1$  %              (b)  $\frac{7020}{6500}$  %              (c)  $\frac{7020-6500}{100}$  %              (d)  $\frac{7020-6500}{6500} \times 100$  %

31. En augmentant sa vitesse moyenne de 3 km/h, un véhicule prendrait une heure de moins pour faire un trajet de 90 km. Quelle est la vitesse moyenne du véhicule ?

32. Les nombres strictement positifs  $V, d, D, L$  satisfont la relation

$$V = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D+d}{4} \right)^2 L$$

Comment  $D$  s'exprime-t-il nécessairement en fonction de  $d, V$  et  $L$  ?

- (a)  $d - 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$               (b)  $d - 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$               (c)  $-d + 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$               (d)  $-d + 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$

33. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui est égale à  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$ , quels que soient les nombres  $a, b, c$  strictement positifs ?

- (a)  $\frac{abc}{ab+ac+bc}$               (b)  $\frac{ab+ac+bc}{abc}$               (c)  $\frac{1}{a+b+c}$               (d)  $\frac{a+b+c}{abc}$

34. Sachant que les nombres réels  $a, b, c$  non nuls sont liés par la relation

$$\frac{1}{a} = 2 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right),$$

comment le nombre  $c$  s'exprime-t-il nécessairement en fonction des autres nombres (toutes les expressions sont supposées définies) ?

- (a)  $\frac{2ab}{2a-b}$               (b)  $\frac{2a-b}{2ab}$               (c)  $\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}\right)^{-1}$               (d)  $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}\right)^{-1}$

35. Que vaut l'expression  $9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$  ?

- (a)  $-\frac{9}{2}$               (b)  $-\frac{3}{2}$               (c)  $\frac{2}{3}$               (d) 18

36. Que vaut l'expression  $\frac{(8 \cdot 10^2)^3 \cdot 10^{-4}}{0,64 \cdot 10^4}$  ?

- (a)  $\frac{1}{80}$               (b)  $\frac{1}{8}$               (c) 8              (d) 800

37. Que vaut  $-(81)^{-\frac{3}{4}}$  ?

- (a) -27              (b)  $-\frac{1}{27}$               (c)  $\frac{1}{27}$               (d) 27

38. Que vaut l'expression  $(x-1)(2x^2-3) + (1-x^2)(2x+1)$ , pour tout nombre réel  $x$  ?

- (a)  $-4x^3 + x^2 + 5x - 2$    (b)  $4x^3 + x^2 + 5x - 2$    (c)  $(1 - x)(4 + 3x)$    (d)  $3x^2 - x + 4$

39. Que vaut l'expression  $32^{0,6}$  ?

- (a)  $\frac{1}{8}$    (b)  $\frac{1}{4}$    (c) 8   (d) 16

40. Soit  $x$  le nombre (non nul) satisfaisant la condition

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{x}$$

Que vaut  $x$  ?

- (a)  $\frac{13}{7}$    (b)  $\frac{91}{27}$    (c) 6   (d) 91

41. Parmi les expressions suivantes (supposées définies), quelle est celle qui est égale à

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-4x+4} - \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-x-2},$$

quel que soit  $x$  ?

- (a)  $\frac{5}{2-x}$    (b)  $\frac{5}{x-2}$    (c)  $\frac{1}{2-x}$    (d)  $\frac{2x-1}{x-2}$

42. Pour quelle valeur du paramètre réel  $m$  l'équation

$$x^2 + 4x + 2(m-1) = 0$$

admet-elle une seule solution ?

- (a)  $m = 1$    (b)  $m = 2$    (c)  $m = 3$    (d)  $m = 9$

43. Un commerçant veut écouler 150 chemises démodées. Il réussit à en vendre 55 au prix initial. Il consent alors un rabais de 5 euros par chemise et en vend ainsi 30. Il liquide le reste à 5 euros l'unité. Calculer le prix initial d'une chemise, sachant qu'il a encaissé en tout 2300 euros ?

- (a) 27 euros   (b) 23 euros   (c) 20 euros   (d) 25 euros

44. Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre réel  $m$  qui rendent l'expression  $-x^2 + 4x + 3m - 2$  strictement négative, quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $[\frac{2}{3}; +\infty[$    (b)  $]\frac{2}{3}; +\infty[$    (c)  $] - \infty; -\frac{2}{3}]$    (d)  $] - \infty; -\frac{2}{3}[$

45. Quel est l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'inéquation  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$  ?

- (a)  $] - \infty, 0[ \cup ]3, +\infty[$    (b)  $] - \infty, 0[ \cup ]3, +\infty[$    (c)  $]3, +\infty[$    (d)  $]3, +\infty[$

46. Un marchand réduit le prix d'un article de 30%. Plus tard, il accorde encore une réduction de 20% sur le prix abaissé. Quelle est la réduction totale sur le prix de base ?

- (a) 44%   (b) 50%   (c) 56%   (d) 60%

47. Le prix d'une action a augmenté de 20% entre 2001 et 2002 puis a baissé de 20% de 2002 à 2003. Quelle a été l'évolution (en pourcents) du prix de cette action entre 2001 et 2003 ?

- (a)  $-20\%$                       (b)  $-4\%$                       (c)  $+0\%$                       (d)  $+4\%$
48. Le salaire d'un travailleur est de 1600 euros après des déductions d'impôts s'élevant à 40% du salaire brut. Quel est le salaire brut de ce travailleur, avant déduction ?
- (a)  $1600 + 40\%$  euros    (b)  $1600 + 40 \times 16$  euros    (c)  $1600 \times \frac{14}{10}$  euros    (d)  $1600 \times \frac{10}{6}$  euros
49. Le mobile A parcourt 500 mètres en 12 minutes. Le mobile B parcourt 200 mètres en 30 secondes. Le mobile C parcourt 300 mètres en 54 secondes. Le mobile D parcourt 1000 mètres en 3 minutes. Deux de ces mobiles ont la même vitesse moyenne, lesquels ?
- (a) A et B                      (b) B et C                      (c) A et D                      (d) C et D
50. Une solution de chlorydrate de morphine 1% contient 1 gramme de morphine pour 100 ml. On administre 4 ampoules de 2 ml de chlorydrate de morphine 1% sur 24 heures. Quelle est la quantité (en milligrammes) de morphine administrée sur 24h ?
- (a) 0,08                      (b) 0,8                      (c) 8                      (d) 80
51. Une solution de chlorydrate de morphine 1% contient 1 gramme de morphine pour 100 ml. Combien d'ampoules de 2 ml de chlorydrate de morphine 1% faut-il administrer sur 24 heures afin d'administrer 25 mg de morphine sur 24h ?
- (a) 1,25                      (b) 1,5                      (c) 2                      (d) 2,25
52. Un entrepreneur commence un chantier avec 36 ouvriers pour terminer le travail en 190 jours. Après 40 jours, le chantier est arrêté pendant 30 jours. Combien d'ouvriers faut-il ajouter après l'arrêt pour terminer dans les temps (on suppose que le rythme de travail est le même quel que soit le nombre d'ouvriers) ?
- (a) 6 ouvriers                      (b) 9 ouvriers                      (c) 13 ouvriers                      (d) 21 ouvriers
53. Lors d'un entraînement, un sprinter parcourt son 100 mètres en 12 secondes. Un chameau court à 24 km/heure, et un petit lézard parcourt 1km en 3 minutes. Si tout ce monde court une minute à ces vitesses, établissez le classement (premier, deuxième, troisième) de la plus grande distance parcourue.
- (a) 1. Chameau 2. Sprinter 3. Lézard                      (c) 1. Sprinter 2. Chameau 3. Lézard  
(b) 1. Chameau 2. Lézard 3. Sprinter                      (d) 1. Sprinter 2. Lézard 3. Chameau
54. Si 4 ouvriers mettent 24h pour effectuer un certain travail, quelle sera la durée nécessaire pour 6 ouvriers pour effectuer le même travail (on suppose que le rythme de travail est le même quel que soit le nombre d'ouvriers) ?
- (a) 12h                      (b) 16h                      (c) 36h                      (d) une autre réponse