

3. Systèmes linéaires et géométrie, exercices

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants, en les inconnues x, y, z, t :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} & 6) \begin{cases} x + y + 3z - 4t = -2 \\ 2x + y + 4z - 3t = 0 \\ 3x + z + t = 4 \\ 4x + y + 5z - t = 4. \end{cases} & 10) \spadesuit \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -2x + 3y - 4z + 2t = -6 \\ -3x - 2y - z - t = -5 \\ -2x - 2y + t = -1 \end{cases} \\
 2) \clubsuit \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} & 7) \spadesuit \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} & 11) \begin{cases} 3x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5. \end{cases} \\
 3) \spadesuit \begin{cases} 2x + 4y = -8 \\ 3x - y = 5 \end{cases} & 8) \clubsuit \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + 4z = 7 \\ -x + 2y + 2z = -3. \end{cases} & 12) \begin{cases} 3x - y - z + 3t = 2 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ 4x + 2y - 3z - 3t = 2 \\ y - 2z + 2t = -1. \end{cases} \\
 4) \spadesuit \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x + 4y = -2 \end{cases} & 9) \begin{cases} x + 2y + z - t = 2 \\ 2x + 5y + 2z - t = 9 \\ -x - y + z + t = 3 \\ 3x + 5y + 4z - 2t = 11. \end{cases}
 \end{array}$$

2. Les nombres réels x et y satisfont le système d'équations

$$\begin{cases} 3x + 8y = 3 \\ 9x - 4y = 2. \end{cases}$$

Que vaut $x + y$?

1) $-\frac{7}{12}$

2) $-\frac{2}{3}$

3) $\frac{2}{3}$

4) $\frac{7}{12}$

3. Une famille a un jardin rectangulaire de 20 mètres de périmètre. On agrandit le terrain : il est rendu deux fois plus long et trois mètres plus large. Son périmètre est alors de 40 mètres. Quelle était l'aire du jardin avant l'agrandissement ?

1) $21m^2$

2) $39m^2$

3) $40m^2$

4) $51m^2$

4. Sachant que

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} ,$$

que vaut $x + y$?

1) 1

2) 1,75

3) 2

4) 2,25

5. Les nombres réels x, y et z satisfont le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 6y - 2z = 9 \\ 2x + 7y - z = 9 \\ x + 4y + 2z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Que vaut $x + 2y + 2z$?

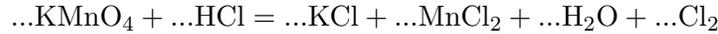
1) 0,5

2) 2,5

3) 8,5

4) 10,5

6. Un jardinier a dépensé 42,60 euros pour des jacinthes à 0,60 euros chacune et des tulipes à 0,40 euros chacune. Il y a 19 tulipes de plus que de jacinthes. Déterminer le nombre de jacinthes et le nombre de tulipes achetées.
7. Lors d'un spectacle on a vendu des places à 16 euros (tarif plein) et des places à 10 euros (tarif réduit). Il y a eu 852 spectateurs pour une recette de 11 160 euros. Déterminer le nombre de places à tarif plein et le nombre de places à tarif réduit.
8. Déterminer les coefficients adéquats pour équilibrer l'équation suivante :



9. (Difficile) On suppose qu'un cycliste a une vitesse de 20 km par heure, en terrain plat, de 16 km par heure en montée et de 24 km par heure en descente. Ce cycliste met 5 heures 20 minutes pour parcourir une route AB dans le sens de A vers B et 5 heures pour la parcourir dans le sens de B vers A. La route ayant une longueur de 100 km, on demande de déterminer les longueurs de terrain plat, de montée et de descente de A vers B.
10. La somme de deux nombres positifs x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?
11. Déterminer tous les x et y réels satisfaisant

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 15 \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$$

12. ♣ A la boulangerie, si j'achète 5 tartes aux pommes et 3 tartes aux abricots, je dois payer 38 euros. Si j'achète 7 tartes aux pommes et une tarte aux abricots, je dois payer 34 euros. Combien devrais-je payer si j'achetais 2 tartes aux pommes et une tarte aux abricots ?

1) 12 euros

2) 14 euros

3) 16 euros

4) 18 euros

13. ♠ Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a en totalité 27 animaux, et 72 pattes d'animaux. En vente directe, un lapin vaut 15 euros et un poulet 10 euros. Quelle est la valeur totale des animaux de la ferme ?

1) 270 euros

2) 315 euros

3) 360 euros

4) 405 euros

14. Il y a six ans, un père avait six fois l'âge de son fils. Dans trois ans, son âge ne sera plus que le triple de l'âge de son fils. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

1) 36 ans

2) 42 ans

3) 54 ans

4) 77 ans

15. Soit un triangle ABC . Représenter les combinaisons linéaires suivantes.

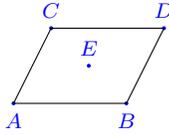
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

2) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

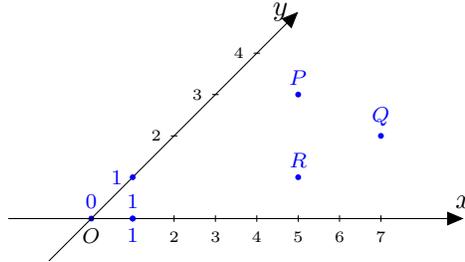
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

4) $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

16. ♣ Soit $ABDC$ un parallélogramme et E le milieu de $[A, D]$. Montrer que E est le milieu de $[B, C]$.



17. ♠ On se donne le repère suivant :



- 1) Représenter les points de coordonnées $A : (2, 4)$, $B : (4, 3)$, $C : (7, 2)$
- 2) Déterminer les coordonnées des points P , Q , R .
- 3) Représenter l'ensemble d des points de coordonnées (x, y) satisfaisant $x = 3$.
- 4) Représenter le centre de gravité du triangle PQR .

18. Dans \mathbb{R}^2 , évaluer

- 1) ♠ $(3, 5) + (1, -7) - (-5, 8)$;
- 2) ♣ $3(5, -2) - 2(4, -1) + (10, 2)$;
- 3) $(3, -4) - 2(-1, 0)$.

19. Dans \mathbb{R}^3 , évaluer

- 1) ♠ $(3, 4, 0) - 2(4, -1, 3)$;
- 2) ♣ $(4, 0, 6) - (-1, 3, 2) + 3(1, 3, 1)$;
- 3) $x(1, 0, 1) + y(2, 1, 0)$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

20. Dans \mathbb{R}^2 , déterminer x et y réels tels que

$$x(2, 4) + y(-1, -1) = (2, 8)$$

21. Même question pour

$$x(2, 4) + y(6, 12) = (4, 5).$$

22. Dans \mathbb{R}^3 , déterminer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) + z(1, 2, 1) = (3, 5, 3).$$

23. ♣ Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien du plan :

$$A : (1, 2), \quad B : (4, 3), \quad C : (3, 4).$$

- 1) Déterminer les composantes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} dans ce repère ;
- 2) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{AB}$ dans ce repère ;
- 3) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ dans ce repère ;

- 4) Déterminer les coordonnées (dans le repère donné) du point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;
- 5) Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[A, B]$;
- 6) De manière générale si $E : (e_1, e_2)$ et $F : (f_1, f_2)$, déterminer les coordonnées du milieu de $[E, F]$.

24. ♠ On se donne les points U, V, W définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$U : (0, 2), \quad V : (6, 2), \quad W : (2, 4).$$

- 1) Déterminer les composantes des vecteurs \overrightarrow{UV} et \overrightarrow{UW} dans ce repère.
- 2) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{UV} - 3\overrightarrow{UW}$ dans ce repère.
- 3) Déterminer les coordonnées du point X tel que $\overrightarrow{UX} = 3\overrightarrow{UV}$.
- 4) Déterminer les coordonnées du point Y tel que $\overrightarrow{UY} = -2\overrightarrow{UW}$.

25. ♣ Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$A : (0, 2), \quad B : (4, 4), \quad C : (5, 3).$$

Le centre de gravité du triangle ABC est le point X satisfaisant $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$. Déterminer les coordonnées du point X dans le repère donné.

26. ♣ De manière générale, déterminer les coordonnées du centre de gravité X du triangle UVW en fonction de celles de $U : (u_1, u_2)$, $V : (v_1, v_2)$ et $W : (w_1, w_2)$.
27. Soit ABC un triangle. On note respectivement A', B', C' les milieux des côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$.
 - 1) Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux ;
 - 2) Démontrer que $\overrightarrow{C'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
28. Soient les points A, B, C, D définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$A : (1, 2), \quad B : (3, -2), \quad C(2, 0), \quad D(7, -3).$$

Déterminer si les points A, B, C sont alignés. Faire de même avec D . Déterminer les conditions sur les coordonnées d'un point $X : (x, y)$ pour que les points A, B et X soient alignés. Faire de même avec A, D et X .

29. ♠ Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A : (-1, 2)$ et $B : (3, 4)$ et $C : (2, 2)$. Quelle est la somme des coordonnées du centre de gravité du triangle ABC ?

- 1) -4 2) 4 3) 8 4) 12

30. ♠ On se place dans un repère du plan et on se donne les points $A : (1, 0)$, $B : (5, 4)$ et $C : (1, 8)$. Soit X le point du plan tel que $2\overrightarrow{XA} - 3\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XC} = \vec{0}$. Quelle est la somme des coordonnées de X ?

- 1) -7 2) -5 3) 5 4) 7

31. Soit un repère cartésien du plan défini par une origine O et des points E_1 et E_2 . Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A : (2, 4)$, $B : (4, 5)$, et $C : (6, 3)$. Le centre de gravité du triangle ABC est le point X satisfaisant $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} = \vec{0}$. Quelles sont les coordonnées du point X dans le repère donné ?

- 1) $(-4, -4)$ 2) $(4, 4)$ 3) $(6, 6)$ 4) $(12, 12)$

32. Soit un repère cartésien du plan défini par une origine O et des points E_1 et E_2 . Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A : (1, 2)$, $B : (4, 3)$, $C : (3, 4)$. Soit aussi le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. Alors la somme des coordonnées de X vaut

- 1) -3 2) 3 3) 5 4) 27

33. Soit un repère orthonormé du plan, et soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A : (1, 2)$, $B : (4, 3)$, $C : (3, 4)$. Soit aussi le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Que vaut la somme des coordonnées de X ?

- 1) 1 2) 4 3) 7 4) une autre valeur

34. Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien du plan

$$A : (0, 2), \quad B : (4, 4), \quad C : (5, 3).$$

Le point X est tel que $3\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$. Quelle est la somme des coordonnées de X dans ce repère ?

- 1) 5 2) 24 3) 30 4) Une autre réponse