3. Systèmes linéaires et géométrie, exercices

1. Résoudre les système linéaires suivants, en les inconnues x, y, z, t :

1) $\left\{\begin{array}{lcl} 3x-2y & = & -8 \\ x+2y & = & 5 \end{array}\right.$

2) ♣ $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+2z & = & 0 \\ x+z & = & -1 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$

3) ♠ $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y & = & -8 \\ 3x-y & = & 5 \end{array}\right.$

4) ♠ $\left\{\begin{array}{lcl} x+3y & = & 1 \\ 5x+4y & = & -2 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+2z & = & 0 \\ x+z & = & -1 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+3z-4t & = & -2 \\ 2x+y+4z-3t & = & 0 \\ 3x+z+t & = & 4 \\ 4x+y+5z-t & = & 4. \end{array}\right.$

7) ♠ $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 1 \\ x+3y & = & 3 \\ 3x+4y & = & 5 \end{array}\right.$

8) ♣ $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 2 \\ 3x+8y+4z & = & 7 \\ -x+2y+2z & = & -3. \end{array}\right.$

9) $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z-t & = & 2 \\ 2x+5y+2z-t & = & 9 \\ -x-y+z+t & = & 3 \\ 3x+5y+4z-2t & = & 11. \end{array}\right.$

10) ♠ $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t & = & 1 \\ -2x+3y-4z+2t & = & -6 \\ -3x-2y-z-t & = & -5 \\ -2x-2y+t & = & -1 \end{array}\right.$

11) $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y+z & = & 9 \\ 2x-y+z & = & 12 \\ x+3y+2z & = & 5. \end{array}\right.$

12) $\left\{\begin{array}{lcl} 3x-y-z+3t & = & 2 \\ x+2y-3z+t & = & 1 \\ 4x+2y-3z-3t & = & 2 \\ y-2z+2t & = & -1. \end{array}\right.$

1) $x=-\frac{3}{4}, y=\frac{23}{8}$
2) $\varnothing$
3) $x=\frac{6}{7}, y=-\frac{17}{7}$
4) $x=-\frac{10}{11}, y=\frac{7}{11}$
5) Voir Ex. 3.
6) $x=1, y=1, z=0, t=1$
7) $\varnothing$
8) $x=1, y=2, z=-3$
9) $x=2, y=1, z=2, t=4$
10) $x=3, y=-2, z=-1, t=1$
11) $x=3, y=-2, z=4$
12) $x=3, y=7, z=6, t=2.$

2. Les nombres réels x et y satisfont le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+8y & = & 3 \\ 9x-4y & = & 2. \end{array}\right.$$

Que vaut $x+y$?

1) $-\frac{7}{12}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) ♡ $\frac{7}{12}$

3. Une famille a un jardin rectangulaire de 20 mètres de périmètre. On agrandit le terrain : il est rendu deux fois plus long et trois mètres plus large. Son périmètre est alors de 40 mètres. Quelle était l'aire du jardin avant l'agrandissement ?

1) ♡ $21m^2$ 2) $39m^2$ 3) $40m^2$ 4) $51m^2$

4. Sachant que

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y=3 \\ x+3y=4 \end{array}\right.,$$

que vaut $x+y$?

1) 1 2) ♡ 1,75 3) 2 4) 2,25

5. Les nombres réels x, y et z satisfont le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x+6y-2z &= 9 \\ 2x+7y-z &= 9 \\ x+4y+2z &= \frac{5}{2} \end{cases}$$

Que vaut $x+2y+2z$?

1) ♡ 0,5 2) 2,5 3) 8,5 4) 10,5

6. Un jardinier a dépensé 42,60 euros pour des jacinthes à 0,60 euros chacune et des tulipes à 0,40 euros chacune. Il y a 19 tulipes de plus que de jacinthes. Déterminer le nombre de jacinthes et le nombre de tulipes achetées.

   Noter t le nombre de tulipes et j le nombre de jacinthes. Ecrire les deux équations. Résoudre le système (par substitution). On trouve $j = 35$ et $t = 54$. Multiplier une des équations par 10 pour ne pas avoir de virgules.

7. Lors d'un spectacle on a vendu des places à 16 euros (tarif plein) et des places à 10 euros (tarif réduit). Il y a eu 852 spectateurs pour une recette de 11 160 euros. Déterminer le nombre de places à tarif plein et le nombre de places à tarif réduit.

   Noter p le nombre de places à prix plein et r le nombre de places à prix réduit. On a $p + r = 852$ et $16p + 10r = 11160$. Il est facile de trouver p par élimination. On trouve $p = 440$ et $r = 412$.

8. Déterminer les coefficients adéquats pour équilibrer l'équation suivante :

$$2\mathrm{KMnO_4} + 16\mathrm{HCl} \to 2\mathrm{KCl} + 2\mathrm{MnCl_2} + 8\mathrm{H_2O} + 5\mathrm{Cl_2}$$

9. (Difficile) On suppose qu'un cycliste a une vitesse de 20 km par heure, en terrain plat, de 16 km par heure en montée et de 24 km par heure en descente. Ce cycliste met 5 heures 20 minutes pour parcourir une route AB dans le sens de A vers B et 5 heures pour la parcourir dans le sens de B vers A. La route ayant une longueur de 100 km, on demande de déterminer les longueurs de terrain plat, de montée et de descente de A vers B.

   Faire un dessin schématisé. Soient respectivement d, p et m le nombre de kilomètres parcourus en descente, en terrain plat, et en montée, de A vers B. On a donc, en calculant la durée du trajet de A vers B :

$$\frac{d}{24} + \frac{p}{20} + \frac{m}{16} = 5 + \frac{1}{3}$$

   De B vers A, il y a m kilomètres en descente, p sur terrain plat et d kilomètres en montée, donc

$$\frac{m}{24} + \frac{p}{20} + \frac{d}{16} = 5.$$

   De plus $d = p = m = 100$. Multiplier les deux premières équations par 240 et résoudre. On trouve $p = 20$, $m = 48$ et $d = 32$.

10. La somme de deux nombres positifs x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?

    On écrit les conditions $x + y = 29$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, et $x^2 - y^2 = 145$ (en supposant $x \geqslant y$). On peut bien sûr résoudre par substitution. Mais on peut aussi factoriser $x^2 - y^2$ pour avoir un sytème linéaire. On trouve que le plus grand nombre est 17 et le plus petit 12.

11. Déterminer tous les x et y réels satisfaisant

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 & = & 15 \\ x^2 - 3y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Ce système dépend de x et y par l'intermédiaire de x^2 et y^2. On peut trouver ces nombres en utilisant les techniques pour les systèmes linéaires. On trouve $x = \pm\sqrt{4,9}$ et $y = \pm\sqrt{1,3}$.

12. ♣ A la boulangerie, si j'achète 5 tartes aux pommes et 3 tartes aux abricots, je dois payer 38 euros. Si j'achète 7 tartes aux pommes et une tarte aux abricots, je dois payer 34 euros. Combien devrais-je payer si j'achetais 2 tartes aux pommes et une tarte aux abricots ?

Fixer les inconnues, résoudre les équations, on trouve $p = 4$ et $a = 6$. On cherche $2p + a$.

1) 12 euros 2) ♡ 14 euros 3) 16 euros 4) 18 euros

13. ♠ Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a en totalité 27 animaux, et 72 pattes d'animaux. En vente directe, un lapin vaut 15 euros et un poulet 10 euros. Quelle est la valeur totale des animaux de la ferme ?

Faire comme ci-dessus. Les lapins ont 4 pattes et les poulets 2. On trouve $l = 9$ et $p = 18$.

1) 270 euros 2) ♡ 315 euros 3) 360 euros 4) 405 euros

14. Il y a six ans, un père avait six fois l'âge de son fils. Dans trois ans, son âge ne sera plus que le triple de l'âge de son fils. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

Ecrire p : âge actuel du père et f âge actuel du fils (en années). On écrit les équations et on trouve $p = 42$ et $f = 12$.

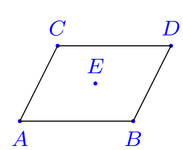
1) 36 ans 2) 42 ans 3) ♡ 54 ans 4) 77 ans

15. Soit un triangle ABC. Représenter les combinaisons linéaires suivantes.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; 2) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 4) $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

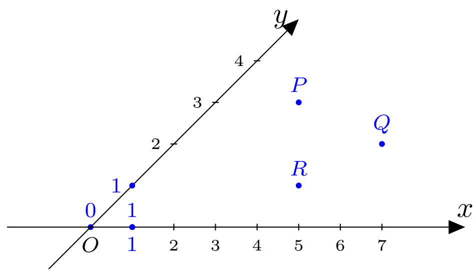
Faire un desin. Utiliser la définition de la somme des vecteurs libres (se ramener à la relation de Chasles). Pour les deux derniers : $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$.

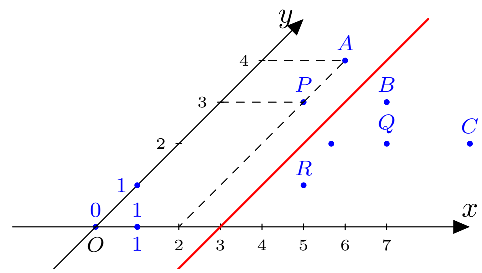
16. ♣ Soit $ABDC$ un parallélogramme et E le milieu de $[A, D]$. Montrer que E est le milieu de $[B, C]$.



Ecrire les hypothèses sous forme vectorielle : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$. On veut montrer $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$. On décompose le premier vecteur pour faire intervenir les hypothèses : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$. On utilise les hypothèses et on conclut.

17. ♠ On se donne le repère suivant :





1) Représenter les points de coordonnées $A:(2,4)$, $B:(4,3)$, $C:(7,2)$
2) Déterminer les coordonnées des points P, Q, R. $(2;3)$, $(5;2)$, $(4;1)$.
3) Représenter l'ensemble d des points de coordonnées (x,y) satisfaisant $x=3$.
4) Représenter le centre de gravité du triangle PQR.

On trace des parallèles aux axes (et non des perpendiculaires) pour représenter les points A,B,C.

18. Dans $\mathbb{R}^2$, évaluer
    1) ♠ $(3;5)+(1;-7)-(-5;8)$; $(9;-10)$
    2) ♣ $3(5;-2)-2(4;-1)+(10;2)$; $(17;-2)$
    3) $(3;-4)-2(-1;0)$. $(5;-4)$
19. Dans $\mathbb{R}^3$, évaluer
    1) ♠ $(3;4;0)-2(4;-1;3)$; $(-5;6;-6)$
    2) ♣ $(4;0;6)-(-1;3;2)+3(1;3;1)$; $(8;6;7)$
    3) $x(1;0;1)+y(2;1;0)$, $(x,y\in\mathbb{R})$. $(x+2y;y;x)$
20. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer x et y réels tels que

$$x(2;4)+y(-1;-1)=(2;8)$$

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont égaux si leurs composantes sont égales. On écrit un système d'équations et on trouve $x=3$ et $y=4$. On a en fait décomposé $(2;8)$ comme une combinaison de $(2;4)$ et $(-1;-1)$.

21. Même question pour

$$x(2;4)+y(6;12)=(4;5).$$

On procède comme ci-dessus et on constate que le système n'a pas de solution : $(4;5)$ ne peut pas se décomposer comme une combinaison des deux éléments de $\mathbb{R}^2$ qui sont donnés.

22. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que

$$x(1,0,2)+y(0,1,-1)+z(1,2,1)=(3,5,3).$$

On écrit l'équation, composante à composante, on obtient un système d'équations, on trouve $x=1, y=1, z=2$. On vérifie.

23. ♣ Soient les points A,B,C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien du plan :

$$A:(1,2),\quad B:(4,3),\quad C:(3,4).$$

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans ce repère ; $(3;1)$ et $(2;2)$

2) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{AB}$ dans ce repère ; $3(3;1) = (9;3)$

3) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ dans ce repère ; $(9;3) - (4;4) = (5;-1)$

4) Déterminer les coordonnées (dans le repère donné) du point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;
On écrit $X : (x_1, x_2)$ et on écrit l'équation, on trouve $X : (16; 11)$.

5) Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[A, B]$;
On écrit $M : (m_1; m_2)$ et on écrit l'équation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. On trouve $M : (\frac{5}{2}; \frac{5}{2})$.

6) De manière générale si $E : (e_1, e_2)$ et $F : (f_1, f_2)$, déterminer les coordonnées du milieu de $[E, F]$.
On fait de même et on trouve $M : (\frac{e_1+f_1}{2}; \frac{e_2+f_2}{2})$. Retenir cette formule (c'est la moyenne arithmétique), ou pouvoir la retrouver facilement.

24. ♠ On se donne les points U, V, W définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$U : (0, 2), \quad V : (6, 2), \quad W : (2, 4).$$

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UW}$ dans ce repère. $(6; 0)$ et $(2; 2)$

2) Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{UV} - 3\overrightarrow{UW}$ dans ce repère. $(12; -6)$

3) Déterminer les coordonnées du point X tel que $\overrightarrow{UX} = 3\overrightarrow{UV}$. Ecrire l'équation. $X : (18; 2)$

4) Déterminer les coordonnées du point Y tel que $\overrightarrow{UY} = -2\overrightarrow{UW}$. De même $Y : (-4; -2)$.

25. ♣ Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$A : (0; 2), \quad B : (4; 4), \quad C : (5; 3).$$

Le centre de gravité du triangle ABC est le point X satisfaisant $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$. Déterminer les coordonnées du point X dans le repère donné. $(3; 3)$

26. ♣ De manière générale, déterminer les coordonnées du centre de gravité X du triangle UVW en fonction de celles de $U : (u_1; u_2)$, $V : (v_1; v_2)$ et $W : (w_1; w_2)$.
On écrit l'équation ci-dessus. Ce sont les mêmes développements. On trouve $X : (\frac{u_1+v_1+w_1}{3}; \frac{u_2+v_2+w_2}{3})$.
C'est donc encore la moyenne arithmétique des coordonnées.

27. Soit ABC un triangle. On note respectivement A', B', C' les milieux des côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$.

1) Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux ;

2) Démontrer que $\overrightarrow{C'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Bon, il y a plusieurs façons de le faire, mais on peut commencer par faire un dessin pour y voir quelque chose. C'est un peu difficile pour ce cours, mais essayons de faire les choses de manière systématique. Soit X le centre le gravité de ABC. C'est l'unique point satisfaisant $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$. Montrons qu'il vérifie aussi $\overrightarrow{XA'} + \overrightarrow{XB'} + \overrightarrow{XC'} = \overrightarrow{0}$. Pour cela, calculons par exemple $\overrightarrow{XA'}$, en utilisant que A' est le milieu de $[B; C]$. On a $\overrightarrow{XA'} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{XA'} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA'}$. En additionnant membre à membre et puisque A' est le milieu de $[B; C]$, on a $\overrightarrow{XA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. De même $\overrightarrow{XB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC})$ et $\overrightarrow{XC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. On fait la somme, et on voit qu'elle s'annule, en utilisant la propriété de X.

Pour le deuxième point, décomposer $\overrightarrow{C'B'}$ en $\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'}$, et utiliser les définitions des milieux : $\overrightarrow{C'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Autre Méthode : Le centre de gravité, noté G du triangle ABC est le point satisfaisant $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (c'est équivalent à l'équation donnée dans l'énoncé). De même, le centre de gravité G' satisfait

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}).$$

Mais on a $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ et $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. En utilisant ces relations dans la dérfinition de $\overrightarrow{OG'}$, on trouve $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG}$, donc $G = G'$.

28. Soient les points A, B, C, D définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien :

$$A : (1,2), \quad B : (3,-2), \quad C(2,0), \quad D(7,-3).$$

Déterminer si les points A, B, C sont alignés. Faire de même avec D. Déterminer les conditions sur les coordonnées d'un point $X : (x, y)$ pour que les points A, B et X soient alignés. Faire de même avec A, D et X.

D'ici peu, on pourra le faire avec les équations de droites. Mais on ne les a pas encore à disposition. On calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB} : (2; -4)$ et $\overrightarrow{AC} : (1; -2)$. Ces vecteurs sont multiples l'un de l'autre, donc les points sont alignés. De même $\overrightarrow{AD} : (6; -5)$, donc $\overrightarrow{AD}$ n'est pas multiple de $\overrightarrow{AB}$, et les points ne sont donc pas alignés. On exprime que $\overrightarrow{AX} : (x-1; y-2)$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$. Cela se voit avec la condition de proportionnalité bien connue :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4}.$$

C'est une équation cartésienne de la droite AB.

De même pour A, D, X on trouve

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-5}.$$

29. ♠ Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A : (-1, 2)$ et $B : (3, 4)$ et $C : (2, 2)$. Quelle est la somme des coordonnées du centre de gravité du triangle ABC ?

1) -4 2) ♡ 4 3) 8 4) 12

30. ♠ On se place dans un repère du plan et on se donne les points $A : (1, 0)$, $B : (5, 4)$ et $C : (1, 8)$. Soit X le point du plan tel que $2\overrightarrow{XA} - 3\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$. Quelle est la somme des coordonnées de X ?

On exprime la condition avec $X : (x; y)$. On trouve $X : (-11; 4)$.

1) ♡ -7 2) -5 3) 5 4) 7

31. Soit un repère cartésien du plan défini par une origine O et des points E_1 et E_2. Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A : (2, 4)$, $B : (4, 5)$, et $C : (6, 3)$. Le centre de gravité du triangle ABC est le point X satisfaisant $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} = 0$. Quelles sont les coordonnées du point X dans le repère donné ?

On applique la formule (moyenne arithmétique). On peut dessiner et vérifier.

1) $(-4,-4)$ 2) ♡ $(4,4)$ 3) $(6,6)$ 4) $(12,12)$

32. Soit un repère cartésien du plan défini par une origine O et des points E_1 et E_2. Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A:(1,2), \quad B:(4,3), \quad C:(3,4)$. Soit aussi le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. Alors la somme des coordonnées de X vaut... On écrit encore l'équation, on peut simplifier en utilisant $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. On trouve $X:(4;-1)$ et on vérifie.

   1) -3 2) ♡ 3 3) 5 4) 27

33. Soit un repère orthonormé du plan, et soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans ce repère : $A:(1,2), \quad B:(4,3), \quad C:(3,4)$. Soit aussi le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Que vaut la somme des coordonnées de X ? On fait comme ci-dessus, on trouve $X:(6;1)$.

   1) 1 2) 4 3) ♡ 7 4) une autre valeur

34. Soient les points A, B, C définis par leurs coordonnées dans un repère cartésien du plan

$$A:(0,2), \quad B:(4,4), \quad C:(5,3).$$

   Le point X est tel que $3\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$. Quelle est la somme des coordonnées de X dans ce repère ? En procédant comme ci-dessus, on trouve que les coordonnées de X sont une moyenne pondérée des coordonnées de A de B et de C, avec les poids 3, 2, 1. On trouve $X:(\frac{13}{6}; \frac{17}{6})$

   1) ♡ 5 2) 24 3) 30 4) Une autre réponse