5. Trigonométrie, produit scalaire, produit vectoriel, exercices

1. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.
2. ♣ Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{BC}\|$.
3. ♣ Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$. Déterminer $\widehat{ABC}$.
4. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut $120°$. Déterminer $\|\overrightarrow{BC}\|$.

   1) $\sqrt{13}$ 2) 5 3) $\sqrt{37}$ 4) 37

5. ♠ Soit un triangle ABC tel que le côté $[A, C]$ mesure $2m$, le côté $[B, C]$ mesure $3m$. L'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$ est $135°$. Quelle est la longueur du côté $[A, B]$?

   1) $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{13}$ 3) $\sqrt{19}$ 4) $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$

6. ♣ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres par exemple) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{13}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
7. ♠ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{61}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
8. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

   1) $\sqrt{13}$ 2) 5 3) $\sqrt{37}$ 4) 25

9. ♠ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 7$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{85}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
10. Soit un triangle ABC dont on donne $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$ (en mètres) et $\widehat{ABC} = 30°$. Déterminer tous les angles du triangle.
11. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 5$. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

    1) $\sqrt{19}$ 2) $\sqrt{34}$ 3) 7 4) 34

12. Soit ABC un triangle tel que la longueur de $[A, C]$ soit $2cm$, la longueur de $[A, B]$ soit $3\sqrt{2}cm$ et tel que l'amplitude de $\widehat{CAB}$ soit $135°$. Quelle est la longueur de $[B, C]$?

    1) $\sqrt{10}cm$ 2) $10cm$ 3) $\sqrt{22}cm$ 4) $\sqrt{34}cm$

13. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (α est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) :

    1) ♣ $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$;
    2) ♠ $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;
    3) ♠ $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \pi$;
    4) $\|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

14. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 1$. Calculer

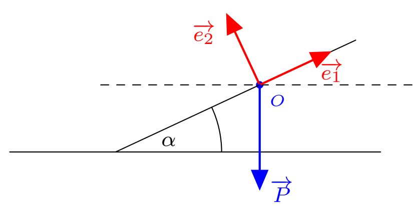
1) ♣ $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$;
2) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$
3) $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^2$.
4) ♠ $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$.

15. Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ du plan. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnés dans cette base par

    1) ♣ $\overrightarrow{u}:(1,3)$, $\overrightarrow{v}:(2,-1)$;
    2) $\overrightarrow{u}:(\pi,1)$, $\overrightarrow{v}:(-1,1)$;
    3) $\overrightarrow{u}:(1,1)$, $\overrightarrow{v}:(1,-1)$;
    4) ♣ $\overrightarrow{u}:(3,4)$, $\overrightarrow{v}:(-4,3)$;
    5) ♠ $\overrightarrow{u}:(5,7)$, $\overrightarrow{v}:(3,-2)$;
    6) ♠ $\overrightarrow{u}:(4,1)$, $\overrightarrow{v}:(-2,3)$.

16. ♣ Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ du plan, et le vecteur $\overrightarrow{u}:(2,-1)$. Déterminer les conditions pour qu'un vecteur $\overrightarrow{v}:(x,y)$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Généraliser à $\overrightarrow{u}:(a,b)\neq 0$.

17. ♣ Dans la situation représentée par le schéma suivant, quelles sont les composantes de $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, en fonction de $P=\|\overrightarrow{P}\|$ et de α.



18. ♣ Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $5N$ et $10N$ et forment entre elles un angle de 60 degrés ($\frac{\pi}{3}$). Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$?

19. ♠ Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $10N$ et $4N$ et forment entre elles un angle de 120 degrés ($\frac{2\pi}{3}$). Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$?

20. Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $10N$ et $4N$ et forment entre elles un angle de 180 degrés. Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$?

21. Soit un repère orthonormé du plan et la droite $d \equiv x+y=3$.
    1) Déterminer une équation cartésienne de la parallèle d' à d contenant le point $A:(2,-1)$;
    2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 perpendiculaire à d et contenant $B:(3,1)$;
    3) Déterminer la pente de d.

22. ♣ Soit un repère orthonormé du plan et la droite d contenant $A:(2;3)$ et admettant $\overrightarrow{v}(2,5)$ pour vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d et contenant $B:(-2,7)$.

23. ♠ Soit un repère orthonormé du plan et les points $A:(2,3)$ et $B:(5,5)$.
    1) Déterminer une équation cartésienne de la droite AB ;
    2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 parallèle à AB contenant $C:(0,-1)$;
    3) Faire de même pour la droite d_3 perpendiculaire à AB et contenant $D:(0,1)$;
    4) Déterminer la pente de AB et de d_3.

24. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation cartésienne $3x+2y=6$. La droite d' est perpendiculaire à d et contient le point P ayant pour coordonnées $(1,1)$. Parmi les équations suivantes, laquelle est une équation cartésienne de d' ?

1) $3x + 2y = 5$ 2) $2x + 3y = 5$ 3) $3y - 2x = 5$ 4) $3y - 2x = 1$

25. Dans un système d'axes orthonormé du plan, on considère la droite d qui contient le point A ayant pour coordonnées $(2, -1)$ et le point B ayant pour coordonnées $(3, 3)$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi les suivantes.
    1) d est parallèle à $d_1 \equiv 2x - y = 3$
    2) d est perpendiculaire à $d_2 \equiv x + 4y = 7$
    3) d contient le point C ayant pour coordonnées $(1, 1)$
    4) aucune des propositions précédentes n'est vraie
26. ♣ On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. La droite d_1 a pour équation cartésienne $y = mx + p$ et d_2 a pour équation $x + m'y + p' = 0$. A quelles conditions sur m et m' ces droites sont-elles perpendiculaires ?

    1) $mm' - 1 = 0$ 2) $mm' + 1 = 0$ 3) $m + m' = 0$ 4) $m - m' = 0$

27. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C données par leurs coordonnées : $A : (1, 2)$, $B : (-2, 1)$ et $C : (4, 3)$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi les suivantes.
    1) A est perpendiculaire à B
    2) les droites AB et AC sont perpendiculaires
    3) les points A, B et C sont alignés
    4) AB est perpendiculaire à l'un des axes de coordonnées
28. ♠ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A : (-1, 2)$ et $B : (3, 4)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + my + 1 = 0$, où m est un nombre réel. Que vaut m si les droites $\mathcal{D}$ et AB sont perpendiculaires ?

    1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

29. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer l'équation de la droite d' perpendiculaire à $d \equiv 3x - 2y + 7 = 0$, et passant par le point $A : (4, 3)$.

    1) $d' \equiv 3x - 2y = 6$ 3) $d' \equiv 2x + 3y = 17$
    2) $d' \equiv 3x + 2y = 18$ 4) $d' \equiv 2x - 3y = -1$

30. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on se donne la droite $d \equiv y = -2x + 4$ et le point $A : (7; 5)$. Quelles sont les coordonnées de la projection orthogonale de A sur d ?

    1) $(-1; 2)$ 2) $(1; 2)$ 3) $(2; -1)$ 4) $(2; 1)$

31. Démontrer qu'il existe exactement une valeur du paramètre réel a pour que l'expression
$$a\ \cos(x) + \cos(\frac{2\pi}{3} + x) + \cos(\frac{2\pi}{3} - x)$$
soit identiquement nulle, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
32. Démontrer que l'expression
$$\sin(2x)\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) - \cos(2x)\sin^2(x) + 1$$
est indépendante du choix du réel x.

33. Démontrer la relation
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y),$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

34. Soit ABC un triangle tel que la longueur de $[A,C]$ soit $2cm$, la longueur de $[A,B]$ soit $3\sqrt{2}cm$ et tel que l'amplitude de $\widehat{CAB}$ soit 135°. Quelle est la longueur de $[B,C]$?

 1) $\sqrt{10}cm$ 2) $10cm$ 3) $\sqrt{22}cm$ 4) $\sqrt{34}cm$

35. ♣ On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,2,-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1,3,2).$$
Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans ce repère.

36. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,0,-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1,1,0).$$
Déterminer les composantes (dans ce repère) d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

37. ♠ On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,1,2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$
Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

 1) $(-1,0,4)$ 2) 3 3) $(2,-4,1)$ 4) $(2,4,1)$

38. Dans un système d'axes orthonormé du plan, on considère les points A, B, C, D définis par leurs coordonnées $A : (2,3)$, $B : (2,5)$, $C : (1,1)$ et $D : (5,5)$. Que vaut le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?

 1) 0 2) 2 3) 6 4) 8

39. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls tels que $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$. Quelle est la mesure, en radians, de l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

 1) 0 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 4) $\frac{5\pi}{6}$

40. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 3$. Que vaut $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$?

 1) 8 2) 11 3) 14 4) 16

41. ♠ Soit ABC un triangle tel que la norme de $\overrightarrow{AB}$ est 8, celle de $\overrightarrow{AC}$ est 3. De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ vaut 12. Quelle est la norme de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$?

 1) 2 2) $\sqrt{52}$ 3) $\sqrt{138}$ 4) 17

42. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A : (2;3)$, $B : (-1;4)$ et $C : (2;-2)$. Soit D le point du plan tel que $BACD$ soit un parallélogramme dont les diagonales sont $[B,C]$ et $[A,D]$. Quelle est la norme de $\overrightarrow{AD}$?

1) $\sqrt{2}$ 2) 2 3) 5 4) 25

43. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{a}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{b}\| = 6$. L'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ vaut 90°. Que vaut alors $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$?

1) $\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{14}$ 3) 10 4) 14

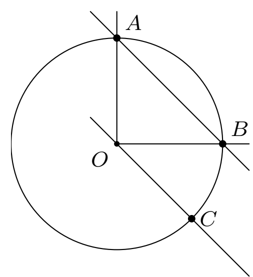
44. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point A a pour coordonnées $(2,0)$, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a une norme égale à 2. Parmi les propositions suivantes, quelles peuvent être les coordonnées de B ?

1) $(0,2)$ 2) $(1,1)$ 3) $(2,2)$ 4) $(3,2)$

45. ♠ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\|\overrightarrow{b}\| = 6$ et $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 9$ (où $\bullet$ désigne le produit scalaire). Que vaut l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$?

1) 0° 2) 30° 3) 45° 4) 60°

46. La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et des droites AB et OC parallèles. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$?



1) $-2\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47. Dans le plan, on considère les vecteurs orthogonaux et normés $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soient $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v} + r\overrightarrow{u}$, ou r est un paramètre réel. Pour quelle valeur de r les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont-ils orthogonaux ?

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) 2

48. Soient des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan euclidien tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = -1$. Que vaut $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$?

1) -28 2) -7 3) 13 4) 29

49. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1,-1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$

Que vaut alors la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$?

1) $\sqrt{14}$ 2) 14 3) $(-2,-3,-1)$ 4) $(-2,3,-1)$

50. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1,1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1,2,-1).$$

Quelle est l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans ce repère ?

1) 2 2) $(-3,-2,1)$ 3) $(-3,2,1)$ 4) $(1,2,-1)$

51. ♠ Dans une base orthonormée positive $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de l'espace, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour composantes $(2,1,-3)$ et $(-1,2,-1)$, respectivement. Comment s'exprime alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$?

1) -3 2) 3 3) $(5,5,5)$ 4) $(5,-5,5)$

52. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans une base orthonormée positive de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1,-1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1,0,2).$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est alors donné par

1) 3 2) $\sqrt{6}$ 3) $(-2,-1,1)$ 4) $(-2,1,1)$

53. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans une base orthonormée positive de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1,-1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$

Que vaut alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$?

1) 1 2) 14 3) $(-2,-3,-1)$ 4) $(-2,3,-1)$

54. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1,1,2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$

Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

1) $(-1,0,4)$ 2) 3 3) $(2,-4,1)$ 4) $(2,4,1)$

55. On considère un losange $ABCD$ dont $[A,C]$ et $[B,D]$ sont des diagonales. Dans un repère orthonormé, A est l'origine et C a pour coordonnées $(2;4)$. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$?

1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) 10 4) 20