5. Trigonométrie, produit scalaire, produit vectoriel, exercices

1. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.
   Théorème d'Al Kashi : $\sqrt{28}$.
2. ♣ Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{BC}\|$.
   Théorème d'Al Kashi : $\sqrt{13}$.
3. ♣ Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$. Déterminer $\widehat{ABC}$.
   On n'a pas la situation d'Al Kashi. En tout cas pas facilement. Mais la règle des sinus s'applique. On trouve $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}$. Donc $\widehat{ABC} = 30°$.
4. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut $120°$. Déterminer $\|\overrightarrow{BC}\|$.

   1) $\sqrt{13}$ 2) 5 3) ♡ $\sqrt{37}$ 4) 37

5. ♠ Soit un triangle ABC tel que le côté $[A, C]$ mesure $2m$, le côté $[B, C]$ mesure $3m$. L'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$ est $135°$. Quelle est la longueur du côté $[A, B]$?

   1) $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{13}$ 3) $\sqrt{19}$ 4) ♡ $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$

6. ♣ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres par exemple) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{13}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
   Théorème d'Al Kashi, mais on cherche l'angle. $60°$.
7. ♠ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{61}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
   Même résolution. $120°$.
8. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

   1) ♡ $\sqrt{13}$ 2) 5 3) $\sqrt{37}$ 4) 25

9. ♠ Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 7$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{85}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$. Même résolution. Ou voir le théorème de Pythagore. $90°$.
10. Soit un triangle ABC dont on donne $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 3$ (en mètres) et $\widehat{ABC} = 30°$. Déterminer tous les angles du triangle.
    On détermine la longueur de $[A; C]$ par le théorème d'AL Kashi. On trouve $25 - 12\sqrt{2}$. On applique ensuite la règle des sinus :
    $$\frac{25 - 12\sqrt{2}}{\sin(30°)} = \frac{4}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{3}{\sin(\widehat{BAC})}.$$
11. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 5$. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $60°$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

    1) ♡ $\sqrt{19}$ 2) $\sqrt{34}$ 3) 7 4) 34

12. Soit ABC un triangle tel que la longueur de $[A, C]$ soit $2cm$, la longueur de $[A, B]$ soit $3\sqrt{2}cm$ et tel que l'amplitude de $\widehat{CAB}$ soit $135°$. Quelle est la longueur de $[B, C]$?

1) $\sqrt{10}cm$ 2) $10cm$ 3) $\sqrt{22}cm$ 4) ♡ $\sqrt{34}cm$

13. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (α est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) :

    1) ♣ $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$;
    2) ♠ $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;
    3) ♠ $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \pi$;
    4) $\|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

    1) $3\sqrt{3}$; 2) $-6\sqrt{2}$; 3) -12 ; 4) -1.

14. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 1$. Calculer

    1) ♣ $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$;
    2) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$
    3) $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2$.
    4) ♠ $|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|$.

    On développe les produits. Pour les normes, on calcule d'abord le carré, puis on revient à ce qui est demandé, en sachant qu'une norme est toujours positive.

    1) -2 2) -5 3) 15 4) $\sqrt{11}$.

15. Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnés dans cette base par

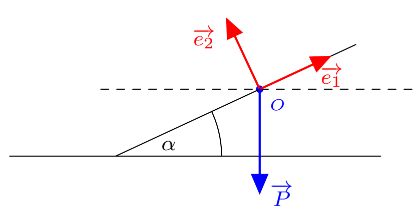
    1) ♣ $\overrightarrow{u} : (1, 3)$, $\overrightarrow{v} : (2, -1)$;
    2) $\overrightarrow{u} : (\pi, 1)$, $\overrightarrow{v} : (-1, 1)$;
    3) $\overrightarrow{u} : (1, 1)$, $\overrightarrow{v} : (1, -1)$;
    4) ♣ $\overrightarrow{u} : (3, 4)$, $\overrightarrow{v} : (-4, 3)$;
    5) ♠ $\overrightarrow{u} : (5, 7)$, $\overrightarrow{v} : (3, -2)$;
    6) ♠ $\overrightarrow{u} : (4, 1)$, $\overrightarrow{v} : (-2, 3)$.

    On utilise la formule, valable dans toute base orthonormée.

    1) -1 2) $1 - \pi$; 3) 0 ; 4) 0 ; 5) 1 ; 6) -5.

16. ♣ Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan, et le vecteur $\overrightarrow{u} : (2, -1)$. Déterminer les conditions pour qu'un vecteur $\overrightarrow{v} : (x, y)$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Généraliser à $\overrightarrow{u} : (a, b) \neq 0$.
    Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ ssi $2x - y = 0$. Les solutions sont tous les multiples de $\overrightarrow{v_0} : (1; 2)$. Dans le cas général, on fait de même pour trouver les multiples des $\overrightarrow{v_0} : (-b; a)$.

17. ♣ Dans la situation représentée par le schéma suivant, quelles sont les composantes de $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, en fonction de $P = \|\overrightarrow{P}\|$ et de α.



    On peut faire de la trigonométrie en utilisant les angles orientés, mais il faut compter de $\overrightarrow{e_1}$ à $\overrightarrow{P}$. En utilisant la formule de décompostion, on trouve $\overrightarrow{P} : (\|\overrightarrow{P}\| \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha), \|\overrightarrow{P}\| \cos(\pi + \alpha))$, si α est donné en radians. Donc, $\overrightarrow{P} : (-\|\overrightarrow{P}\| \sin(\alpha), -\|\overrightarrow{P}\| \cos(\alpha))$.

18. ♣ Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $5N$ et $10N$ et forment entre elles un angle de 60 degrés ($\frac{\pi}{3}$). Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$?
    On développe $\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\|^2$, et on trouve $175N^2$. Donc on trouve $5\sqrt{7}N$.
19. ♠ Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $10N$ et $4N$ et forment entre elles un angle de 120 degrés ($\frac{2\pi}{3}$). Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$?
    Même résolution que ci-dessus, on trouve $\sqrt{76}N = 2\sqrt{19}N$.
20. Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $10N$ et $4N$ et forment entre elles un angle de 180 degrés. Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$?
    On trouve $6N$ en appliquant la même méthode ou en réfléchissant un peu.
21. Soit un repère orthonormé du plan et la droite $d \equiv x + y = 3$.
    1) Déterminer une équation cartésienne de la parallèle d' à d contenant le point $A : (2, -1)$;
       $x + y = 1$.
    2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 perpendiculaire à d et contenant $B : (3, 1)$;
       $x - y = 2$
    3) Déterminer la pente de d.
       -1.
22. ♣ Soit un repère orthonormé du plan et la droite d contenant $A : (2; 3)$ et admettant $\overrightarrow{v}(2, 5)$ pour vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d et contenant $B : (-2, 7)$.
    $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-7}{2}$ (voir l'exercice 16 pour un vecteur directeur).
23. ♠ Soit un repère orthonormé du plan et les points $A : (2, 3)$ et $B : (5, 5)$.
    1) Déterminer une équation cartésienne de la droite AB ;
       $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2}$
    2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 parallèle à AB contenant $C : (0, -1)$;
       $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{2}$
    3) Faire de même pour la droite d_3 perpendiculaire à AB et contenant $D : (0, 1)$;
       $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3}$ (voir l'exercice 16 pour un vecteur directeur).
    4) Déterminer la pente de AB et de d_3. $\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{2}$. On retrouve que le produit des pentes vaut -1.
24. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation cartésienne $3x+2y = 6$. La droite d' est perpendiculaire à d et contient le point P ayant pour coordonnées $(1, 1)$. Parmi les équations suivantes, laquelle est une équation cartésienne de d' ?

    1) $3x + 2y = 5$ 2) $2x + 3y = 5$ 3) $3y - 2x = 5$ 4) ♡ $3y - 2x = 1$

25. Dans un système d'axes orthonormé du plan, on considère la droite d qui contient le point A ayant pour coordonnées $(2, -1)$ et le point B ayant pour coordonnées $(3, 3)$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi les suivantes.
    1) d est parallèle à $d_1 \equiv 2x - y = 3$
    2) ♡ d est perpendiculaire à $d_2 \equiv x + 4y = 7$
    3) d contient le point C ayant pour coordonnées $(1, 1)$
    4) aucune des propositions précédentes n'est vraie
26. ♣ On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. La droite d_1 a pour équation cartésienne $y = mx + p$ et d_2 a pour équation $x + m'y + p' = 0$. A quelles conditions sur m et m' ces droites sont-elles perpendiculaires ?

1) $mm' - 1 = 0$ 2) $mm' + 1 = 0$ 3) $m + m' = 0$ 4) ♡ $m - m' = 0$

27. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C données par leurs coordonnées : $A : (1, 2)$, $B : (-2, 1)$ et $C : (4, 3)$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi les suivantes.
    1) A est perpendiculaire à B
    2) les droites AB et AC sont perpendiculaires
    3) ♡ les points A, B et C sont alignés
    4) AB est perpendiculaire à l'un des axes de coordonnées
28. ♠ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A : (-1, 2)$ et $B : (3, 4)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + my + 1 = 0$, où m est un nombre réel. Que vaut m si les droites $\mathcal{D}$ et AB sont perpendiculaires ?

    1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) ♡ $\frac{1}{2}$ 4) 2

29. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer l'équation de la droite d' perpendiculaire à $d \equiv 3x - 2y + 7 = 0$, et passant par le point $A : (4, 3)$.

    1) $d' \equiv 3x - 2y = 6$ 3) ♡ $d' \equiv 2x + 3y = 17$
    2) $d' \equiv 3x + 2y = 18$ 4) $d' \equiv 2x - 3y = -1$

30. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on se donne la droite $d \equiv y = -2x + 4$ et le point $A : (7; 5)$. Quelles sont les coordonnées de la projection orthogonale de A sur d ?

    1) $(-1; 2)$ 2) ♡ $(1; 2)$ 3) $(2; -1)$ 4) $(2; 1)$

31. Démontrer qu'il existe exactement une valeur du paramètre réel a pour que l'expression
$$a\,\cos(x) + \cos(\frac{2\pi}{3} + x) + \cos(\frac{2\pi}{3} - x)$$
soit identiquement nulle, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
En utilisant les formules d'addition, on trouve que l'expression vaut $(a-1)\cos(x)$, qui est nulle pour tout x quand $a = 1$.
32. Démontrer que l'expression
$$\sin(2x)\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) - \cos(2x)\sin^2(x) + 1$$
est indépendante du choix du réel x.
Les formules d'addition donnent lieu aux formules de duplication : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. On remplace dans l'expression. On utilise la relation fondamentale pour tout transformer en sinus. On constate que tout se simplifie sauf le dernier 1.
33. Démontrer la relation
$$\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2(x) - \sin^2(y),$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
On utilise les formules d'addition et les produits remarquables pour montrer que le membre de gauche vaut
$$\cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y).$$
On utilise les relations $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$ et $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et on conclut.
34. Soit ABC un triangle tel que la longueur de $[A, C]$ soit $2cm$, la longueur de $[A, B]$ soit $3\sqrt{2}cm$ et tel que l'amplitude de $\widehat{CAB}$ soit $135°$. Quelle est la longueur de $[B, C]$?

1) $\sqrt{10}cm$ 2) $10cm$ 3) $\sqrt{22}cm$ 4) ♡ $\sqrt{34}cm$

35. ♣ On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1, 2, -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1, 3, 2).$$
Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans ce repère.
On applique la formule : $(7, -3, 1)$.

36. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1, 0, -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1, 1, 0).$$
Déterminer les composantes (dans ce repère) d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On peut supposer le repère positif et calculer le produit vectoriel. Après, on oublie le caractère positif du repère. Le vecteur dont les composantes sont $(1, -1, 1)$ convient, de même que tous ses multiples.

37. ♠ On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1, 1, 2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1, 0, 2).$$
Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

1) $(-1, 0, 4)$ 2) 3 3) ♡ $(2, -4, 1)$ 4) $(2, 4, 1)$

38. Dans un système d'axes orthonormé du plan, on considère les points A, B, C, D définis par leurs coordonnées $A : (2, 3)$, $B : (2, 5)$, $C : (1, 1)$ et $D : (5, 5)$. Que vaut le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?

1) 0 2) 2 3) 6 4) ♡ 8

39. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls tels que $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$. Quelle est la mesure, en radians, de l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

1) 0 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) ♡ $\frac{2\pi}{3}$ 4) $\frac{5\pi}{6}$

40. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 3$. Que vaut $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$?

1) 8 2) 11 3) ♡ 14 4) 16

41. ♠ Soit ABC un triangle tel que la norme de $\overrightarrow{AB}$ est 8, celle de $\overrightarrow{AC}$ est 3. De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ vaut 12. Quelle est la norme de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$?

1) 2 2) ♡ $\sqrt{52}$ 3) $\sqrt{138}$ 4) 17

42. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A : (2; 3)$, $B : (-1; 4)$ et $C : (2; -2)$. Soit D le point du plan tel que $BACD$ soit un parallélogramme dont les diagonales sont $[B, C]$ et $[A, D]$. Quelle est la norme de $\overrightarrow{AD}$?

1) $\sqrt{2}$ 2) 2 3) ♡ 5 4) 25

43. Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{a}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{b}\| = 6$. L'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ vaut 90°. Que vaut alors $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$?

1) $\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{14}$ 3) ♡ 10 4) 14

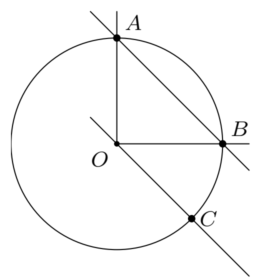
44. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point A a pour coordonnées $(2, 0)$, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a une norme égale à 2. Parmi les propositions suivantes, quelles peuvent être les coordonnées de B ?

1) $(0, 2)$ 2) $(1, 1)$ 3) ♡ $(2, 2)$ 4) $(3, 2)$

45. ♠ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs tels que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\|\overrightarrow{b}\| = 6$ et $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 9$ (où $\bullet$ désigne le produit scalaire). Que vaut l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$?

1) $0°$ 2) $30°$ 3) $45°$ 4) ♡ $60°$

46. La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et des droites AB et OC parallèles. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$?



1) ♡ $-2\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47. Dans le plan, on considère les vecteurs orthogonaux et normés $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soient $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v} + r\overrightarrow{u}$, ou r est un paramètre réel. Pour quelle valeur de r les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont-ils orthogonaux ?

1) $\frac{1}{3}$ 2) ♡ $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) 2

48. Soient des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan euclidien tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = -1$. Que vaut $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$?

1) -28 2) ♡ -7 3) 13 4) 29

49. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1, 0, 2).$$

Que vaut alors la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$?

1) ♡ $\sqrt{14}$ 2) 14 3) $(-2, -3, -1)$ 4) $(-2, 3, -1)$

50. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1, 2, -1).$$

Quelle est l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans ce repère ?

1) 2 2) $(-3,-2,1)$ 3) ♡ $(-3,2,1)$ 4) $(1,2,-1)$

51. ♠ Dans une base orthonormée positive $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de l'espace, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour composantes $(2,1,-3)$ et $(-1,2,-1)$, respectivement. Comment s'exprime alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$?

    1) -3 2) 3 3) ♡ $(5,5,5)$ 4) $(5,-5,5)$

52. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans une base orthonormée positive de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,-1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (1,0,2).$$
Le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est alors donné par

    1) 3 2) $\sqrt{6}$ 3) ♡ $(-2,-1,1)$ 4) $(-2,1,1)$

53. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans une base orthonormée positive de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,-1,1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$
Que vaut alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$?

    1) 1 2) 14 3) ♡ $(-2,-3,-1)$ 4) $(-2,3,-1)$

54. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :
$$\overrightarrow{u} : (1,1,2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1,0,2).$$
Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

    1) $(-1,0,4)$ 2) 3 3) ♡ $(2,-4,1)$ 4) $(2,4,1)$

55. On considère un losange $ABCD$ dont $[A,C]$ et $[B,D]$ sont des diagonales. Dans un repère orthonormé, A est l'origine et C a pour coordonnées $(2;4)$. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}$?

    1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) ♡ 10 4) 20