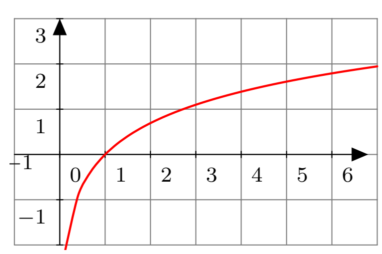
6-7 Fonctions, limites et continuité, exercices

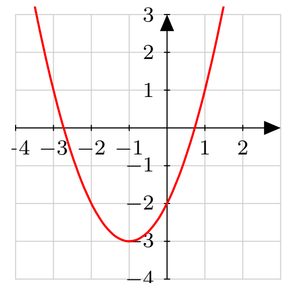
1. ♣ Soit f une fonction dont le domaine est $[0,2]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de $f \circ g$?
2. ♣ Soit f une fonction dont le domaine est $[0,1]$. Soit
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x).$$
Quel est le domaine de définition de $f \circ g$? Quel est le domaine de définition de $g \circ f$?
3. Soient les fonctions
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}.$$
Déterminer le domaine de définition de f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.
4. ♠ Etant donné les fonctions
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2\sqrt{x}$$
et
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{2 - x^2},$$
déterminer le domaine de définition de f et g. Décrire algébriquement les fonctions $f + g$, $f - g$, $\frac{f}{g}$, et fg et $f \circ g$ et déterminer leur domaine.
5. Etudier la parité des fonctions suivantes.
   1) ♣ $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 3$;
   2) ♣ $f_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$;
   3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : z \mapsto 3z - 2z^2$;
   4) $f_4 : [-2, 2] \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} -3t & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 3t & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$
6. ♠ Si f et g sont impaires, que peut-on dire de $f \circ g$, $f - g$ et $\frac{f}{g}$?
7. Démontrer que si f est impaire et si 0 appartient à dom_f, alors $f(0) = 0$.
8. Décomposer les fonctions suivantes comme une composition ou une combinaison de fonctions connues. En déduire le domaine de définition.
   1) ♣ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{tg}\,(\frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x-1}) + \sqrt[3]{x^2 - 1}$;
   2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(\frac{y}{2})}$
   3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{t} + \arcsin(t^2 - 2)$
   4) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sqrt{\frac{1}{2} + \sin(t)} + \mathrm{tg}\,(2t)$.
9. ♠ Trouver $f \circ g \circ h$ pour f, g et h définies par $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x - 1$ pour tout x convenable.
10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{3 - x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$, donner le domaine de f et de g. Donner le domaine de définition et décrire algébriquement les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.
11. ♣ Déterminer l'unique fonction du premier degré f telle que $f(1) = 3$ et $f(5) = 11$;
12. Déterminer l'unique fonction du premier degré g telle que $g(2) = 3$ et dont la pente est -3.
13. ♠ Déterminer la pente de la fonction du premier degré h telle que $h(1) = 5$ et $h(3) = 10$. Déterminer h, et $h(7)$.

14. ♣ En général, déterminer la pente d'une fonction du premier degré f à partir de ses valeurs en deux nombres distincts a et b.
15. ♠ Le montant de la facture de mon téléphone fixe s'exprime en fonction du nombre de minutes de communication, à l'aide d'une fonction du premier degré. Pour 50 minutes, je paie 16 euros et pour 2 heures et trente minutes, je paie 28 euros. Combien paierais-je pour 3 heures et 20 minutes ?
16. La coordonnée sur un axe d'un mobile suivant un mouvement rectiligne uniforme est donnée par une fonction du premier degré. Sachant que sa position en $t = 3s$ est à $15m$ de l'origine et qu'en $t = 8s$, il est à $40m$ de l'origine, déterminer sa vitesse en m/s et sa position après 30 secondes.
17. ♣ Déterminer en quel point la fonction du second degré
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$$
admet un extremum. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?
18. Déterminer l'axe de symétrie du graphe et les zéros de la fonction précédente. Représenter cette fonction.
19. ♠ On lance une pierre à la verticale, à partir du sol, avec une vitesse initiale de 20m/s. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la pierre (on fera une approximation : $g = 10m/s^2$) ?
20. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives :
    1) ♠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 64 - 2x$;
    2) ♣ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$;
    3) $h :]5, +\infty[\to]0, +\infty[: x \mapsto x^2 - 5x$;
    4) $i : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$.
    5) ♣ $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x+3}{5x-2}$
    6) ♠ $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x+7}{4x-3}$

    Si la réponse est affirmative, déterminer la fonction réciproque correspondante.
21. Soit la fonction g définie pour tout x par $g(x) = \sqrt{7 + 2x}$. Déterminer le domaine et l'image de g. Démontrer que g est injective et déterminer la fonction réciproque.
22. ♠ La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la fonction f. Le domaine de la fonction f est $]0, +\infty[$ et elle est strictement croissante.

    Quel est le domaine de $f \circ f$?
23. ♣, ♠ La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(6)$?



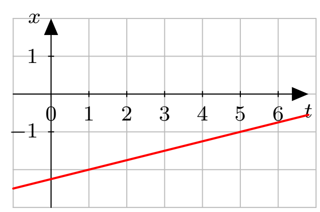
24. la fonction g définie par
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \frac{1}{|x|}.$$
Déterminer le domaine de définition de g. Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Donner une représentation graphique de cette fonction et l'utiliser pour se convaincre du résultat.
25. Expliquer pourquoi l'expression $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ n'a pas de sens.
26. Calculer les limites suivantes, quand elles peuvent être considérées.

1) ♣ $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 2$
2) ♣ $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
3) ♠ $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x}$
4) ♠ $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}$
5) ♣ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x+3}$
6) ♣ $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$
7) ♠ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$
8) ♠ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$
9) ♠ $\lim_{x\to-2} \sqrt{x^2+2x-1}$
10) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x-1}$
11) ♠ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
12) ♣ $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$
14) ♠ $\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(x+1)}{(x-4)x^2}$
15) ♣ $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{(\sqrt{4+x^2}-2)\cos(2x)}$
16) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$
17) ♣ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-3x+4}$
18) ♣ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+2x^2-1}{3x^2-3x+4}$
19) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-4}$
20) ♠ $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+4}{x-3}$
21) ♠ $\lim_{x\to 2} \frac{2x+4}{x-3}$
22) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^2-1}{x^2-3x+4}$
23) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x^2-1}{x^2-3x+4}$
24) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2x^2-1}}{x^2-3x+4}$
25) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2x^2-1}}{x^2-3x+4}$
26) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x-3}}{x-4}$
27) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x-3}}{x-4}$
28) ♠ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{x}$;
29) ♠ $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{x}$;
30) $\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2(\sqrt{1+x^2})-1}{(x-1)^3(\sqrt{4+x^2}-2)}$
31) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$

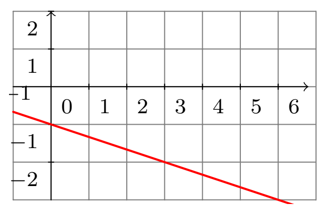
27. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f définie par $f(x) = x + \cos(\sqrt{x})$. Calculer $\lim_{x\to\pi} f(x)$.
28. Déterminer le domaine de définition et de continuité de g définie par $g(x) = -x + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{1-x^2})$.
29. Déterminer le domaine de continuité de
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$$
30. Déterminer les réels a et b pour que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x^2 - ax + b & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$
31. Déterminer le domaine de définition et de continuité de x définie par $x(t) = t + \sqrt{\cos(t)}$. Calculer $\lim_{t\to\frac{\pi}{6}} x(t)$ et $\lim_{t\to\pi} x(t)$;
32. Sachant que, si x est exprimé en radians, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculer les limites suivantes :

1) ♣ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$; 2) ♠ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)(x^3-2)}{\sin(5x)(4x^3-2)}$; 3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)(x-3)}{(\frac{\pi}{2}-x)\sin(x)}$.

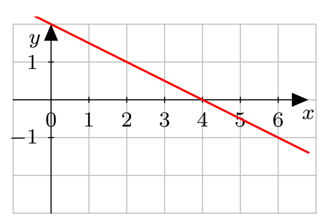
33. Calculer la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{x(x-3)}{\sqrt{x-3}(x-1)}\right)$.
34. ♠ Calculer la limite $\lim_{x\to 1} g(x)$ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^3+1)(x-1)^2}{(\sqrt{3+x^2}-2)\cos(\pi x)}$.
35. Calculer la limite $\lim_{x\to 3} g(x)$ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)\sin(\frac{\pi x}{6})}\right)$.
36. Soit f la fonction du premier degré f satisfaisant $f(2) = 4$ et $f(-1) = 13$. Calculer $f(12)$.
37. Calculer le nombre $f(20)$ si f est la fonction du premier degré telle que $f(4) = 2$ et $f(8) = 10$.
38. Calculer le nombre $f(10)$ si f est la fonction du premier degré telle que $f(4) = -2$ et $f(-3) = 12$.
39. Soit f la fonction du premier degré telle que $f(2) = 1$ et $f(6) = -1$. Que vaut $f(12)$?
40. ♠ La position $x(t)$ sur un axe gradué d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme est donnée en fonction du temps t par le graphique suivant. Quelle sera la position du mobile en $t = 17$?



41. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du premier degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(-6)$?

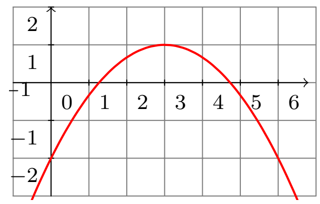


42. Soit f la fonction du premier degré dont une partie de la représentation graphique est donnée par la figure suivante et soit g une fonction dont le domaine est $]1; +\infty[$. Quel est le domaine de $g \circ f - g$?



1) $]2; +\infty[$
2) $]-\infty; 2[$
3) $]1; +\infty[$
4) aucun des ensembles précédents

43. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(-2)$?



1) -12 2) $-\frac{22}{3}$ 3) $-\frac{14}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

44. Les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2(-x^2+8x-7)}$$

et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt{(-x^2+8x-7)}$$

sont égales.

1) Vrai 2) Faux

45. On lance un objet vers le haut. Cet objet est soumis à la gravité, et on néglige les frottements. Sa position (sur un axe vertical, gradué en mètres) est donnée approximativement en fonction du temps (en secondes) par la fonction

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t) = -5t^2 + v_0 t + y_0,$$

où v_0 représente la vitesse initiale, positive. Sachant que l'objet atteint sa hauteur maximale après 4 secondes, que vaut v_0, en mètres par secondes ?

46. Soient f et g deux fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$, telles que f est strictement croissante et g strictement décroissante. Alors la fonction $f - g$ est strictement croissante.

1) Vrai 2) Faux

47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction du second degré telle que $f(0) = 2$, et qui atteint un minimum, égal à -1 en $x = 1$. Que vaut $f(3)$?

48. (Difficile) La fonction

$$f : [1; +\infty[\to [7; +\infty[: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 2x + 8}$$

admet une réciproque.

1) Vrai 2) Faux

49. Quelle est la pente de la fonction réciproque de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$$

? -3

50. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Quel est le domaine de $f \circ g$?

1) $[2, +\infty[$
2) $[8, +\infty[$
3) $\mathbb{R}$
4) aucune des propositions précédentes.

51. Que vaut $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$?

1) $\frac{0}{0}$
2) elle n'est pas définie
3) 2
4) une autre valeur

52. (Difficile) Que vaut $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$?

1) $\frac{0}{0}$
2) 0
3) 1
4) elle n'existe pas

53. Que vaut $\lim_{x\to 2}(\frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2x^2-3x}}{x-2})^4$?

1) 0
2) $\frac{1}{32}$
3) $\frac{1}{64}$
4) $+\infty$

54. Que vaut $\lim_{x\to +\infty} \frac{-1+x-2x^3}{2+|x|-2|x|^3}$?

1) $-\frac{1}{2}$
2) 1
3) -1
4) une autre valeur

55. Que vaut $\lim_{x\to 5} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+24}-7)}{(x-5)(x-4)}$?

56. Que vaut $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+24}-7)(x+2)}{(x-5)(x+3)}$?

57. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. On a alors $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2+1)}{x^2+1} = 2$.

1) Vrai
2) Faux

58. (Difficile) Que vaut $\lim_{x\to 0} \frac{1}{tg(\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi-x}-\sqrt{\pi}}{x})}$?

1) 0
2) ∞
3) une autre valeur
4) elle n'existe pas.

59. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$. On a alors $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x^2} = 3$.

1) Vrai
2) Faux

60. Que vaut $\lim_{x\to 4} \sin(\frac{\pi(x-4)}{x^2-6x+8})$?

1) 0
2) 1
3) elle n'est pas définie
4) une autre valeur

61. Que vaut $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$?

1) $\frac{0}{0}$
2) $-\infty$
3) $+\infty$
4) elle n'est pas définie

62. Que vaut la limite $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(1+x)(\sqrt{x+8}-3)}$?

1) 3
2) -6
3) 6
4) elle n'existe pas

63. Que vaut la limite $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$?

1) 0
2) 6
3) $\frac{0}{0}$
4) elle n'est pas définie

64. Que vaut la limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}+x}{x}$?

1) $\frac{+\infty}{+\infty}$
2) 0
3) 2
4) elle n'existe pas.

65. Que vaut la limite $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}+x}{x}$?

1) $\frac{+\infty-\infty}{-\infty}$
2) 0
3) 2
4) elle n'existe pas.

66. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à dom_f. Si $b \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to a} f(x) = b$ dans une des conditions suivantes ; laquelle ?
   1) $\exists \eta > 0 : \forall \varepsilon > 0, (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$
   2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$
   3) $\exists \eta > 0 : \forall \varepsilon > 0, (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-b| < \eta) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$
   4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-b| < \eta) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$

67. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2+7x}{1+3x+2x^2}$. Que vaut $\lim_{x\to +\infty} f(x)$?

1) 0
2) $\frac{1}{2}$
3) 2
4) $\frac{+\infty}{+\infty}$

68. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-4x-5}-\sqrt{x^2-25}}{x-5}$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 5} f(x)$?

1) 1
2) $\frac{0}{0}$
3) ∞
4) Elle n'est pas définie

69. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 5} g(x)$?

1) 0
2) 1
3) 8
4) une autre réponse

70. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^2 - \frac{\sqrt{t^2-3t+9}}{t-2}$ Que vaut la limite $\lim_{t\to 3} f(t)$?

1) -6

2) 0

3) 6

4) elle n'est pas définie

71. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3-5x-6a}{x^2-9}$ admet une limite finie en $x = 3$. Que vaut a (2) ?

72. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)^3 + 2x + 1$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$?

1) $\frac{0}{0} + 1$

2) 0

3) 27

4) une autre valeur

73. Que vaut $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$?

1) $\frac{0}{0}$

2) 0

3) 3

4) elle n'existe pas