6-7 Fonctions, limites et continuité, exercices

1. Soit f une fonction dont le domaine est $[0,2]$. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de $f\circ g$?
   On exprime les conditions. Attention à l'inéquation. $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$
2. Soit f une fonction dont le domaine est $[0,1]$. Soit
   $$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sin(x).$$
   Quel est le domaine de définition de $f\circ g$? Quel est le domaine de définition de $g\circ f$?
   $\mathrm{dom}_{f\circ g}=\{x:\sin(x)\in[0;1]\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi;\pi+2k\pi]$, $\mathrm{dom}_{g\circ f}=[0;1]$.
3. Soient les fonctions
   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\cos(x)\quad\text{et}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:y\mapsto\sqrt{y}.$$
   Déterminer le domaine de définition de f, g, $g\circ f$ et $f\circ g$.
   $\mathrm{dom}_f=\mathbb{R}$, $\mathrm{dom}_g=[0;+\infty[$, $\mathrm{dom}_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:\cos(x)\geqslant 0\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $\mathrm{dom}_{f\circ g}=[0;+\infty[$.
4. Étant donné les fonctions
   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 2\sqrt{x}$$
   et
   $$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sqrt{2-x^2},$$
   déterminer le domaine de définition de f et g. Décrire algébriquement les fonctions $f+g$, $f-g$, $\frac{f}{g}$, et fg et $f\circ g$ et déterminer leur domaine.
   Vu les propriétés de la racine carrée, on a $\mathrm{dom}_f=[0;+\infty[$, $\mathrm{dom}_g=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ Le domaine de $f+g$, de $f-g$ et de fg est $[0;\sqrt{2}]$, et pour x dans ce domaine $(f\pm g)(x)=2\sqrt{x}\pm\sqrt{2-x^2}$ et $(fg)(x)=2\sqrt{x}\sqrt{2-x^2}$. Le domaine de $\frac{f}{g}$ est $[0;\sqrt{2}[$, et dans ce domaine $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^2}}$. Enfin, $\mathrm{dom}_{f\circ g}=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, et $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\sqrt[4]{2-x^2}$.
5. Etudier la parité des fonctions suivantes.
   1) $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2+3$;
   2) $f_2:[0,+\infty[\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3-x$;
   3) $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:z\mapsto 3z-2z^2$;
   4) $f_4:[-2,2]\to\mathbb{R}:t\mapsto\begin{cases}-3t & \text{si } t\leqslant 0\\ 3t & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$

   La fonction f_1 est paire, f_2 n'est ni paire ni impaire, f_3 n'est ni paire ni impaire, et f_4 est paire.
6. Si f et g sont impaires, que peut-on dire de $f\circ g$, $f-g$ et $\frac{f}{g}$?
   $f\circ g$ et $f-g$ sont impaires, $\frac{f}{g}$ est paire.
7. Démontrer que si f est impaire et si 0 appartient à dom_f, alors $f(0)=0$.
   On a $f(0)=f(-0)=-f(0)$, donc $f(0)$ est égal à son opposé. Il est donc nul.
8. Décomposer les fonctions suivantes comme une composition ou une combinaison de fonctions connues. En déduire le domaine de définition.
   1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\mathrm{tg}\,(\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x-1})+\sqrt[3]{x^2-1}$;
   2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:y\mapsto\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(\frac{y}{2})}$

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{t} + \arcsin(t^2 - 2)$

4) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sqrt{\frac{1}{2} + \sin(t)} + \operatorname{tg}(2t)$.

On regarde somme, produits, composées. On lit en français et on repère les "de" et les "du". On fait attention à mettre les composées à l'endroit (dans les expressions du type $\cos^2(x)$). On applique les théorèmes correspondant à la décomposition pour trouver les domaines.

9. Trouver $f \circ g \circ h$ pour f, g et h définies par $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x - 1$ pour tout x convenable.
   Le domaine de $f \circ g \circ h$ est $\{x : (x-1)^3 + 1 \neq 0\}$. En résolvant l'équation correspondante, on trouve que le domaine est $\mathbb{R}_0$. On a alors $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{(x-1)^3+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.
10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{3-x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$, donner le domaine de f et de g. Donner le domaine de définition et décrire algébriquement les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.
    On a $\mathrm{dom}_f =]-\infty; 3]$, $\mathrm{dom}_g = [0; +\infty[$. Alors $x \in \mathrm{dom}_{f \circ g}$ ssi $x \in \mathrm{dom}_g = [0; +\infty[$ et $g(x) \in \mathrm{dom}_f =]-\infty; 3]$. Cette dernière condition s'écrit $\sqrt{x} \leqslant 3$, qui est équivalente à $x \leqslant 9$ (on peut élever au carré et garder une inéquation équivalente car les deux membres sont positifs). Le domaine est donc $[0; 9]$. On pouvait le voir aussi à partir de l'expression analytique :
    $$(f \circ g)(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}.$$
    En procédant de la même façon, on trouve
    - $\mathrm{dom}_{g \circ f} =]-\infty; 3]$ et $(g \circ f)(x) = \sqrt[4]{3-x}$, si $x \in]-\infty; 3]$.
    - $\mathrm{dom}_{f \circ f} = [-6; 3]$ et $(f \circ f)(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3-x}}$, si $x \in [-6; 3]$.
    - $\mathrm{dom}_{g \circ g} = [0; +\infty[$ et $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$, si $x \in [0; +\infty[$
11. Déterminer l'unique fonction du premier degré f telle que $f(1) = 3$ et $f(5) = 11$;
    $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ (on écrira aussi plus simplement $(f(x) = 2x + 1)$).
12. Déterminer l'unique fonction du premier degré g telle que $g(2) = 3$ et dont la pente est -3.
    $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = -3x + 9$
13. Déterminer la pente de la fonction du premier degré h telle que $h(1) = 5$ et $h(3) = 10$. Déterminer h et $h(7)$.
    La pente est donnée par $\frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{5}{2}$. Alors $h(x) = h(1) + \frac{5}{2}(x-1)$, ou encore $h(x) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$. Donc $h(7) = 20$.
14. En général, déterminer la pente d'une fonction du premier degré f à partir de ses valeurs en deux nombres distincts a et b.
    On a vu le calcul pour les équations de droites. On peut aussi exprimer les conditions pour une fonction f donnée par $f(x) = mx + p$ et on trouve $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (ce que l'on note parfois dans d'autres cours $\frac{\Delta f}{\Delta x}$).
15. Le montant de la facture de mon téléphone fixe s'exprime en fonction du nombre de minutes de communication, à l'aide d'une fonction du premier degré. Pour 50 minutes, je paie 16 euros et pour 2 heures et trente minutes, je paie 28 euros. Combien paierais-je pour 3 heures et 20 minutes ?
    Notons $P(t)$ le prix en euros pour t minutes consommées. C'est une fonction du premier degré satisfaisant les conditions $P(50) = 16$ et $P(150) = 28$. On trouve $P(t) = 16 + \frac{12}{100}(t - 50)$. On calcule $P(200) = 34$.
16. La coordonnée sur un axe d'un mobile suivant un mouvement rectiligne uniforme est donnée par une fonction du premier degré. Sachant que sa position en $t = 3s$ est à $15m$ de l'origine et qu'en $t = 8s$, il est à $40m$ de l'origine, déterminer sa vitesse en m/s et sa position après 30 secondes.

Noter $x(t)$ la position du mobile au temps t, en mètres. Exprimer les conditions. On trouve la vitesse de $5m/s$. Après 30 secondes, le mobile se trouve à 150 mètres de l'origine. On a simplement multiplié car en l'instant initial, le mobile se trouvait à l'origine.

17. Déterminer en quel point la fonction du second degré

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$$

admet un extremum. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?
Appliquer la formule. On trouve $x_m = \frac{5}{2}$, c'est un minimum (coefficient de x^2).

18. Déterminer l'axe de symétrie du graphe et les zéros de la fonction précédente. Représenter cette fonction.
L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$. Les zéros sont 2 et 3. La représentation est une parabole, que l'on pourra tracer en ajoutant quelques points aux informations listées ci-dessus.

19. On lance une pierre à la verticale, à partir du sol, avec une vitesse initiale de 20m/s. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la pierre (on fera une approximation : $g = 10m/s^2$) ?
La hauteur de la pierre (en mètres) s'exprime en fonction du temps (en secondes) via la fonction du second degré

$$y(t) = 0 + 20t - \frac{10t^2}{2} = -5t^2 + 20t.$$

La hauteur maximale est atteinte en $t_m = 2$ et elle vaut $y(2) = 20$. C'est une bonne idée de résoudre cet exercice en général, avec une vitesse initiale v_0.

20. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives :
    1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 64 - 2x$;
    2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$;
    3) $h :]5, +\infty[\to]0, +\infty[: x \mapsto x^2 - 5x$;
    4) $i : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$.
    5) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x+3}{5x-2}$
    6) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x+7}{4x-3}$

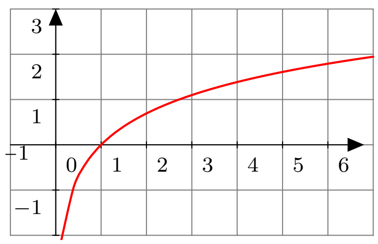
    Si la réponse est affirmative, déterminer la fonction réciproque correspondante.
    On considère l'équation $y = f(x)$, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée de la fonction. On cherche à voir si, pour tout y donné, il y a au plus une solution x dans l'ensemble de départ. Cette solution est alors $f^{-1}(y)$.

    1) L'équation $y = 64 - 2x$ admet une seule solution, quel que soit y, c'est $x = 32 - y$. Donc la fonction est injective et
    $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto 32 - y.$$
    2) L'équation $y = \cos(x)$, pour $y \in [-1; 1]$ et pour $x \in \mathbb{R}$ admet de nombreuses solutions, donc la fonction n'est pas injective.
    3) On considère l'équation $y = x^2 - 5x$, où y appartient à $]0, +\infty[$ et où on cherche une solution $x \in]5, +\infty[$. C'est une équation du second degré que l'on réécrit $x^2 - 5x - y = 0$. On a $\Delta = 25 + 4y > 0$, pour $y > 0$. On trouve $x = \frac{5 \pm \sqrt{25+4y}}{2}$. Mais on cherche une solution dans $]5; +\infty[$, donc la fonction est injective et on a $h^{-1}(y) = \frac{5+\sqrt{25+4y}}{2}$.
    4) La fonction est injective et $i^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.
    5) La fonction j est injective et $j^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{2y+3}{5y-2}$

6) La fonction k est injective et $k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{3y+7}{4y-1}$.

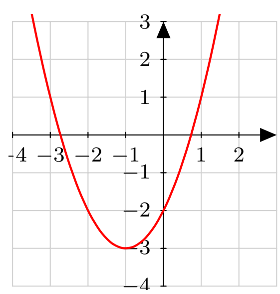
21. Soit la fonction g définie pour tout x par $g(x) = \sqrt{7+2x}$. Déterminer le domaine et l'image de g. Démontrer que g est injective et déterminer la fonction réciproque.
Le domaine est $[-\frac{7}{2}; +\infty[$ et l'image $[0; +\infty[$. L'application est injective et $g^{-1}(y) = \frac{y^2-7}{2}$, définie sur $[0; +\infty[$.

22. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la fonction f. Le domaine de la fonction f est $]0, +\infty[$ et elle est strictement croissante.



Quel est le domaine de $f \circ f$? $]1; +\infty[$

23. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(6)$? 46



24. Soit la fonction g définie par

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \frac{1}{|x|}.$$

Déterminer le domaine de définition de g. Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$, et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$. Donner une représentation graphique de cette fonction et l'utiliser pour se convaincre du résultat.
Le domaine est $\mathbb{R}_0$. Les limites sont $+\infty$, 0 et 0. La représentation graphique est obtenue à partir de celle de $h(x) = \frac{1}{x}$...

25. Expliquer pourquoi l'expression $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x}$ n'a pas de sens.
Parce que $-\infty$ n'est pas adhérent au domaine de la fonction en question.

26. Calculer les limites suivantes, quand elles peuvent être considérées.

1) $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 2$
2) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x|}{x}$
4) $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x|}{x}$
5) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x+3}$
6) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$
7) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$
8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$
9) $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^2+2x-1}$
10) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x-1}$
11) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
12) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$
14) $\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(x+1)}{(x-4)x^2}$

15) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{(\sqrt{4+x^2}-2)\cos(2x)}$

16) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

17) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-3x+4}$

18) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3+2x^2-1}{3x^2-3x+4}$

19) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{x-4}$

20) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+4}{x-3}$

21) $\lim_{x\to 2} \frac{2x+4}{x-3}$

22) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3+2x^2-1}{x^2-3x+4}$

23) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3+2x^2-1}{x^2-3x+4}$

24) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2x^2-1}}{x^2-3x+4}$

25) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2x^2-1}}{x^2-3x+4}$

26) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x-3}}{x-4}$

27) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x-3}}{x-4}$

28) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{x}$;

29) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{x}$;

30) $\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2(\sqrt{1+x^2}-1)}{(x-1)^3(\sqrt{4+x^2}-2)}$

31) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$

1) 0
2) n'existe pas
3) 1
4) -1
5) 0
6) 8 (P)
7) 2 (conjugué, P)
8) 5 (factoriser, P)
9) non défini
10) $\sqrt{7}$
11) 1 (conjugué, P)
12) $\frac{1}{4}$ (conjugué, P)
13) 2 (2x conjugué, P)
14) $\frac{4}{9}$ (produit, conjugué, P)
15) 2 (produit, 2x conjugué, P)
16) 0 (factoriser, P)
17) 3
18) $-\infty$
19) 2
20) 2
21) -8
22) $+\infty$
23) $-\infty$
24) $\sqrt{3}$
25) $\sqrt{3}$
26) $\sqrt{3}$
27) $-\sqrt{3}$
28) 2
29) -2
30) -8 (Produit, 2x conj., P)
31) $3a^2$ (Factoriser, P).

27. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f définie par $f(x) = x + \cos(\sqrt{x})$. Calculer $\lim_{x\to\pi} f(x)$.
La fonction est définie et continue sur $[0; +\infty[$. La limite est $\pi + \cos(\sqrt{\pi})$.

28. Déterminer le domaine de définition et de continuité de g définie par $g(x) = -x + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{1-x^2})$.
Le domaine de définition et de continuité est $[-1; 1]$.

29. Déterminer le domaine de continuité de
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$$
Le domaine de définition et de continuité est $]3; +\infty[$.

30. (Difficile) Déterminer les réels a et b pour que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x^2 - ax + b & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$
Sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$, la fonction coïncide avec une fonction continue. Elle est continue ssi elle est continue en 1 et en 2. Il est donc nécessaire et suffisant que la fonction admette des limites en ces points. Cela est équivalent au fait que les limites à droite et à gauche en ces points existent et soient égales à la valeur de la fonction en ces points. On obtient les conditions $a+b = 1-a+b$ et $4-2a+b = 2$. On trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.

31. Déterminer le domaine de définition et de continuité de x définie par $x(t) = t + \sqrt{\cos(t)}$. Calculer $\lim_{t\to\frac{\pi}{6}} x(t)$ et $\lim_{t\to\pi} x(t)$;
Le domaine de définition et de continuité est $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) > 0\}$. Donc la première limite est $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. L'autre limite n'est pas définie.

32. Sachant que, si x est exprimé en radians, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)(x^3-2)}{\sin(5x)(4x^3-2)}$; 3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)(x-3)}{(\frac{\pi}{2}-x)\sin(x)}$.

Posons $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $g(mx) = \frac{\sin(mx)}{mx}$, pour tout $m \neq 0$. On a $\lim_{x\to 0} g(mx) = 1$. Cela permet de calculer les limites, en utilisant aussi la décomposition en produit ou en transformant le cosinus :

1) 4 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{\pi}{2} - 3$.

33. Calculer la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{tg}\,(\frac{x(x-3)}{\sqrt{x-3}(x-1)})$. 0

34. Calculer la limite $\lim_{x\to 1} g(x)$ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^3+1)(x-1)^2}{(\sqrt{3+x^2}-2)\cos(\pi x)}$. 0

35. Calculer la limite $\lim_{x\to 3} g(x)$ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)\sin(\frac{\pi x}{6})})$.
On ne l'a pas encore revu, mais le logarithme est une fonction continue. On calcule donc la limite à l'intérieur et on trouve $\ln(\frac{1}{4})$.

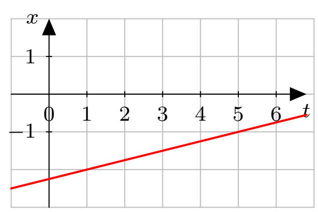
36. Soit f la fonction du premier degré f satisfaisant $f(2) = 4$ et $f(-1) = 13$. Calculer $f(12)$.
On trouve $f(x) = 10 - 3x$, pour tout x, donc -26.

37. Calculer le nombre $f(20)$ si f est la fonction du premier degré telle que $f(4) = 2$ et $f(8) = 10$.
On trouve $f(x) = 2x - 6$, pour tout x, donc 34.

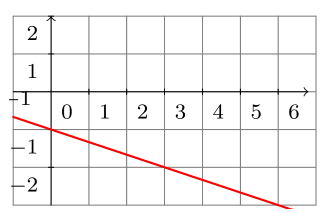
38. Calculer le nombre $f(10)$ si f est la fonction du premier degré telle que $f(4) = -2$ et $f(-3) = 12$.
On trouve $f(x) = -2x + 6$, pour tout x, donc -14.

39. Soit f la fonction du premier degré telle que $f(2) = 1$ et $f(6) = -1$. Que vaut $f(12)$? -4

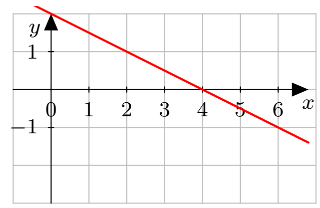
40. La position $x(t)$ sur un axe gradué d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme est donnée en fonction du temps t par le graphique suivant. Quelle sera la position du mobile en $t = 17$? 2



41. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du premier degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(-6)$? 1

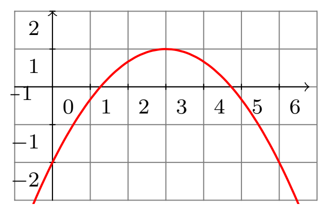


42. Soit f la fonction du premier degré dont une partie de la représentation graphique est donnée par la figure suivante et soit g une fonction dont le domaine est $]1;+\infty[$. Quel est le domaine de $g\circ f - g$?



1) $]2;+\infty[$
2) $]-\infty;2[$
3) $]1;+\infty[$
4) ♡ aucun des ensembles précédents

43. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du second degré, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(-2)$?



1) -12
2) ♡ $-\frac{22}{3}$
3) $-\frac{14}{3}$
4) $\frac{2}{3}$

44. Les fonctions

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \sqrt{x^2(-x^2+8x-7)}$$

et

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x\sqrt{(-x^2+8x-7)}$$

sont égales.

1) ♡ Vrai
2) Faux

On regarde le domaine de ces deux fonctions. On voit qu'elles sont définies sur l'intervalle $[1;7]$. Dans cet intervalle, $\sqrt{x^2}=x$.

45. On lance un objet vers le haut. Cet objet est soumis à la gravité, et on néglige les frottements. Sa position (sur un axe vertical, gradué en mètres) est donnée approximativement en fonction du temps (en secondes) par la fonction

$$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: t\mapsto y(t) = -5t^2+v_0t+y_0,$$

où v_0 représente la vitesse initiale, positive. Sachant que l'objet atteint sa hauteur maximale après 4 secondes, que vaut v_0, en mètres par secondes ? 40.

46. Soient f et g deux fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$, telles que f est strictement croissante et g strictement décroissante. Alors la fonction $f-g$ est strictement croissante.

1) ♡ Vrai

2) Faux

47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction du second degré telle que $f(0) = 2$, et qui atteint un minimum, égal à -1 en $x = 1$. Que vaut $f(3)$? 11
48. (Difficile) La fonction
$$f : [1; +\infty[\to [7; +\infty[: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 2x + 8}$$
admet une réciproque.

1) ♡ Vrai

2) Faux

49. Quelle est la pente de la fonction réciproque de la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$$
? -3
50. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Quel est le domaine de $f \circ g$?

1) $[2, +\infty[$

2) $[8, +\infty[$

3) ♡ $\mathbb{R}$

4) aucune des propositions précédentes.

51. Que vaut $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$?

1) $\frac{0}{0}$

2) elle n'est pas définie

3) 2

4) ♡ une autre valeur

52. (Difficile) Que vaut $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|}$?

1) $\frac{0}{0}$

2) ♡ 0

3) 1

4) elle n'existe pas

53. Que vaut $\lim_{x \to 2} (\frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{2x^2 - 3x}}{x - 2})^4$?

1) 0

2) $\frac{1}{32}$

3) ♡ $\frac{1}{64}$

4) $+\infty$

54. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + x - 2x^3}{2 + |x| - 2|x|^3}$?

1) $-\frac{1}{2}$

2) ♡ 1

3) -1

4) une autre valeur

55. Que vaut $\lim_{x \to 5} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2 + 24} - 7)}{(x-5)(x-4)}$? 5
56. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 24} - 7)(x+2)}{(x-5)(x+3)}$? 1
57. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. On a alors $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2$.

1) $\heartsuit$ Vrai

2) Faux

58. (Difficile) Que vaut $\lim_{x\to 0} \frac{1}{tg(\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi-x}-\sqrt{\pi}}{x})}$?

1) $\heartsuit$ 0

2) ∞

3) une autre valeur

4) elle n'est pas définie

59. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$. On a alors $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x^2} = 3$.

1) Vrai

2) $\heartsuit$ Faux

Il est vrai que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = 3$. On voit que l'affirmation est fausse déjà pour $f(x) = 3x$.

60. Que vaut $\lim_{x\to 4} \sin(\frac{\pi(x-4)}{x^2-6x+8})$?

1) 0

2) $\heartsuit$ 1

3) elle n'est pas définie

4) une autre valeur

61. Que vaut $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$?

1) $\frac{0}{0}$

2) $\heartsuit$ $-\infty$

3) $+\infty$

4) elle n'est pas définie

62. Que vaut la limite $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(1+x)(\sqrt{x+8}-3)}$?

1) 3

2) $\heartsuit$ -6

3) 6

4) elle n'existe pas

63. Que vaut la limite $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$?

1) 0

2) $\heartsuit$ 6

3) $\frac{0}{0}$

4) elle n'est pas définie

64. Que vaut la limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}+x}{x}$?

1) $\frac{+\infty}{+\infty}$

2) 0

3) $\heartsuit$ 2

4) elle n'existe pas.

65. Que vaut la limite $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}+x}{x}$?

1) $\frac{+\infty-\infty}{-\infty}$

2) $\heartsuit$ 0

3) 2

4) elle n'existe pas.

66. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à dom_f. Si $b \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to a} f(x) = b$ dans une des conditions suivantes ; laquelle ?

1) $\exists \eta > 0 : \forall \varepsilon > 0, (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

2) $\heartsuit$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

3) $\exists \eta > 0 : \forall \varepsilon > 0, (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-b| < \eta) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-b| < \eta) \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon$

67. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2+7x}{1+3x+2x^2}$. Que vaut $\lim_{x\to +\infty} f(x)$?

1) ♡ 0

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{+\infty}{+\infty}$

68. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-4x-5}-\sqrt{x^2-25}}{x-5}$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 5} f(x)$?

    1) 1
    2) $\frac{0}{0}$
    3) ♡ ∞
    4) Elle n'est pas définie

69. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 5} g(x)$?

    1) 0
    2) 1
    3) 8
    4) ♡ une autre réponse

70. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^2 - \frac{\sqrt{t^2-3t+9}}{t-2}$ Que vaut la limite $\lim_{t\to 3} f(t)$?

    1) -6
    2) 0
    3) ♡ 6
    4) elle n'est pas définie

71. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3-5x-6a}{x^2-9}$ admet une limite finie en $x = 3$. Que vaut a ? 2

72. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)^3 + 2x + 1$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$?

    1) $\frac{0}{0} + 1$
    2) 0
    3) 27
    4) ♡ une autre valeur

73. Que vaut $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$?

    1) $\frac{0}{0}$
    2) 0
    3) ♡ 3
    4) elle n'existe pas