8. Dérivées et applications exercices

1. Calculer la dérivée de la fonction f suivante définie par l'expression donnée. Précisez sur quel intervalle le calcul est valide. Nous reverrons dans le prochain chapitre que ln est définie sur $]0;+\infty[$ et que $D\ln(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$. De même, nous verrons que l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et que $De^x = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   1) ♠ $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$;
   2) $f(t) = 3t + \frac{1}{t}$
   3) $f(t) = 4t^2 + \frac{1}{t^3}$
   4) $f(x) = \frac{5}{x}$
   5) $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$
   6) ♠ $f(x) = 3\sin(x)\text{tg}\,(x)$
   7) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
   8) $f(x) = (1-2x)(1+6x)$
   9) $f(t) = (3t-5)^3$
   10) $f(t) = t^2\sin^2(t)\cos(t)$
   11) ♠ $f(t) = \frac{2t+1}{t^2+5t-1}$
   12) ♠ $f(x) = x^4\sin^3 x$;
   13) $f(x) = \sin(x^3)$;
   14) $f(x) = 1 + \text{tg}\,^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$;
   15) $f(x) = 1 + \cos^2 x$;
   16) $f(x) = x^2\cos(\text{tg}\,(x^2))$;
   17) ♠ $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+12x-30}$;
   18) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$;
   19) $f(x) = \text{tg}\,^2(3x)$;
   20) $f(x) = (3x-5)(\sin(x) - 3x^2)$;
   21) $f(y) = (\text{tg}\,(y)+2)(\sin(y)-3)$;
   22) $f(t) = \frac{(t^3+4t)}{(t^3-1)}$;
   23) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{1+\text{tg}\,(x)}$;
   24) ♠ $f(x) = 3x^2\sin(x) + 4x\cos(x)$;
   25) ♠ $f(y) = \sqrt[3]{y^2-1}$;
   26) $f(x) = \ln(x^2 + 2 + \sin(x))$;
   27) ♠ $f(y) = \ln(\cos(3y))$;
   28) ♠ $f(z) = z^2 e^{(z^2)}$;

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Pourquoi ?
3. Déterminer dans chaque cas l'approximation linéaire L de la fonction f en le point x_0 donné :

   1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2$ et $x_0 = 1$;
   2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^4$ et $x_0 = 0$;
   3) ♠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 4$;
   4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ et $x_0 = 0$;
   5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ et $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
   6) ♠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x^2)$ et $x_0 = 0$;
   7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$ et $x_0 = 7$;
   8) ♠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$ et $x_0 = 2$;
   9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x^2-x+1}{\cos(x)}$ en $x_0 = 0$;
   10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x^2-x+1}{\cos(x)}$ en $x_0 = 1$.

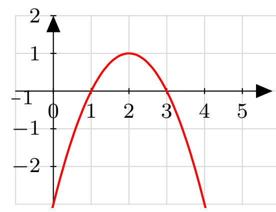
   Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f en le point x_0 donné ?
4. Pourquoi écrit-on dans certains livres $x \simeq 0 \Rightarrow \sin(x) \simeq x$?
5. ♠ Déterminer le point $x \in \mathbb{R}$ en lequel la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ s'annule. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum pour cette fonction. Comparez avec les résultats vus sur les fonctions du second degré.
6. La fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
   est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Pourquoi ?

7. ♠ Déterminer la dérivée des fonctions arctg , arcsin et arccos .
8. Déterminer pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{ax^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$$

admet un extremum en $x = -2$.

9. ♠ La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on nécessairement déduire sur f ?



   1) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 1$
   2) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 2$
   3) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 3$
   4) La fonction f est croissante sur $]0; 1[$.

10. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction

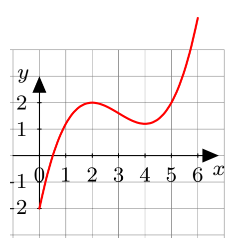
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7$$

est croissante.

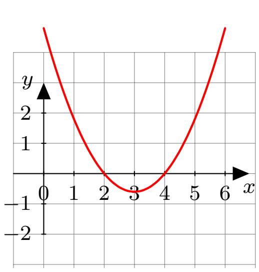
11. ♠ Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et satisfaisant $f'(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit encore la fonction g définie par $g(x) = f(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g admet nécessairement un minimum en 0. Vrai ou faux ?
12. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminez l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent, à propos de f.

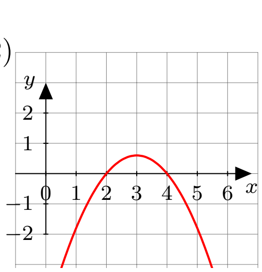
   1) Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.
   2) Elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   3) Elle admet un minimum en $x = 1$.
   4) Elle admet un maximum en $x = 1$.

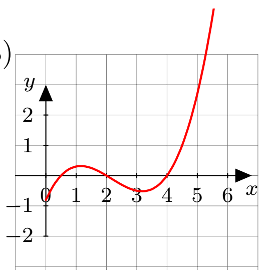
13. ♠ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ représentée (sur l'intervalle $]0, 6[$) par le graphique suivant.

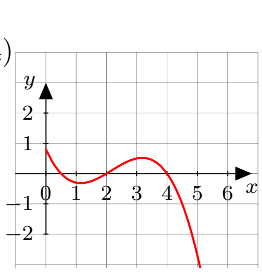


Quelle peut être la représentation graphique de la dérivée de f (sur l'intervalle $]0, 6[$) ?

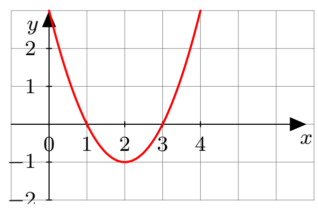


2) 

3) 

4) 

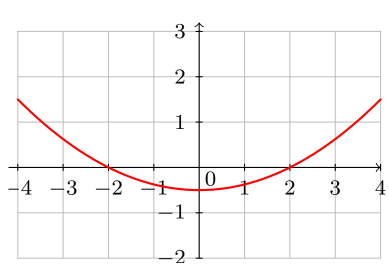
14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est représentée (sur l'intervalle $]0,4[$) par le graphique suivant.



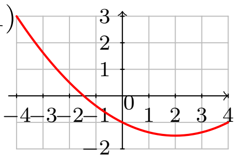
Déterminer l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent pour la fonction f :

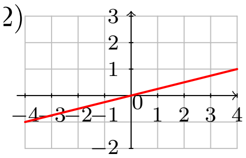
1) elle est décroissante sur $]0,2[$
2) elle est croissante sur $]0,2[$
3) elle admet un maximum local au point d'abscisse $x=1$
4) elle admet un minimum local au point d'abscisse $x=2$

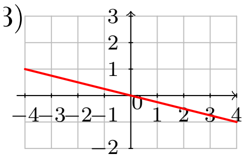
15. Déterminer les extrema (locaux) de
    1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: t\mapsto 3t^2-6t-1$;
    2) $g:[-1,4]\to\mathbb{R}: y\mapsto 3y^3-9y^2+8$;
16. ♠ On considère un segment $[A,B]$ de longueur a et un point M de $[A,B]$. On considère les disques de diamètres $[A,M]$ et $[M,B]$. Déterminer quand la somme des aires de ces disques est minimale.
17. Aux quatre coins d'une feuille carrée en carton de côté a, on enlève des carrés égaux. Déterminer pour quels carrés enlevés la boite obtenue en pliant les bords de la forme obtenue a un volume maximal.
18. ♠ On inscrit un rectangle dans un cercle de rayon R. Déterminer quand ce rectangle a une aire maximale.
19. Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit de volume V donné et de surface minimale (bases comprises).
20. Considérons la fonction f dont la représentation graphique est la suivante (sur l'intervalle $]-4,4[$).

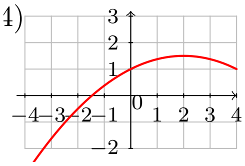


Déterminer parmi les représentations graphiques suivantes celle de la dérivée f' de f.

1) 

2) 

3) 

4) 

21. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit la fonction g définie par $g(x) = x + f(x^2)$. Calculez $g'(0)$.

    1) 0
    2) 1
    3) 2
    4) c'est impossible à déterminer

22. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2 e^{2t}$. Quelle est l'expression de la fonction dérivée f' ?

    1) $f'(t) = 2te^{2t}$
    2) $f'(t) = 2t(1+t)e^{2t}$
    3) $f'(t) = t(2+t)e^{2t}$
    4) $f'(t) = 4te^{2t}$

23. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 \ln(x^3)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

    1) $f'(x) = \frac{6}{x^2}$
    2) $f'(x) = 6x\ln(x^3) + \frac{3}{x}$
    3) $f'(x) = 6x\ln(x^3) + 9x$
    4) $f'(x) = 3x(2\ln(x^3) + 3)$

24. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

    1) $f'(x) = -\frac{8}{(x-1)^2}$
    2) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$
    3) $f'(x) = -\frac{8}{(3x+5)^2}$
    4) $f'(x) = \frac{8}{(x-1)^2}$

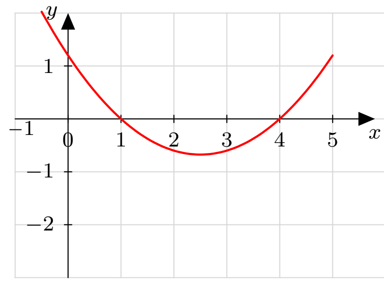
25. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin(2x)}$?

    1) $f'(x) = -2e^{\sin(2x)}\cos(2x)$
    2) $f'(x) = 2e^{\sin(2x)}\cos(2x)$
    3) $f'(x) = e^{2\cos(2x)}$
    4) $f'(x) = e^{\sin(2x)}$

26. Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 1 + \cos^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

    1) elle est croissante
    2) elle est décroissante
    3) elle est impaire
    4) elle est paire

27. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on nécessairement déduire sur f ?



1) La fonction f s'annule en $x = 1$.
2) La fonction f admet un minimum (local) en $x = 2.5$.
3) La fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2.5$.
4) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 1$.

28. Soit g une fonction à valeurs strictement positives et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours vraie ?

1) $(\ln(g(x)))' > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2) $(\ln(g(x)))' \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3) $(\ln(g(x)))' < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4) $(\ln(g(x)))' \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

29. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $f'(x) = -\frac{1}{1+x^{-2}}$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

1) $f(0) = 0$.
2) $f(1) < f(10)$
3) $f(1) > f(10)$
4) $f(10) = 0$

30. Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\sqrt{2}\,x\right)$. Quelle est l'expression de la fonction dérivée de f ?

1) $f'(x) = -\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$
2) $f'(x) = -\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}$
3) $f'(x) = \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}$
4) $f'(x) = \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}x$

31. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\cos(x^2)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

1) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) - x^2\sin(x^2))$
2) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) + x^2\sin(x^2))$
3) $f'(x) = x(\cos(x^2) - x\sin(x^2))$
4) $f'(x) = x(\cos(x^2) + x\sin(x^2))$

32. Parmi les fonctions f qui suivent, quelle est la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$?

1) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
2) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
3) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
4) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

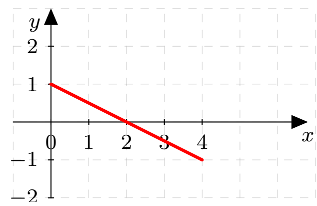
33. Parmi les propositions suivantes, laquelle donne l'expression de la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sin^2(x^3)$?

1) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + \cos(x^3))$
2) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 6x^3)$
3) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 6x^3 \cos(x^3))$
4) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 2x \cos(x^3))$

34. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. Que vaut $f'(2)$?

1) $-\frac{13}{3}$
2) $-\frac{13}{9}$
3) $\frac{19}{9}$
4) $\frac{19}{3}$

35. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est représentée (sur l'intervalle $]0, 4[$) par le graphique suivant.



Que peut-on nécessairement en déduire sur la fonction f ?

1) Elle est croissante sur $]3, 4[$
2) Elle est décroissante sur $]0, 2[$
3) Elle admet un minimum local en $x = 2$
4) Elle admet un maximum local en $x = 2$

36. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(3x^2)$. Parmi les propositions suivantes, déterminer l'expression de la dérivée de f.

1) $f'(x) = -\sin^2(3x^2)$
2) $f'(x) = -2\,\sin(6x)$
3) $f'(x) = -9x^2\,\sin(6x^3)$
4) $f'(x) = -12x\,\sin(3x^2)\,\cos(3x^2)$

37. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x^2)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

1) $f'(x) = -\sin(x^2)$
2) $f'(x) = -2x\sin(x^2)$
3) $f'(x) = \cos(x^2) - \sin(x^2)$
4) $f'(x) = \cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)$

38. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^3 - 3x^2 + 3x + 2)^3$

1) admet un maximum en $x_0 = 1$
2) admet un minimum en $x_0 = 1$
3) est croissante sur $\mathbb{R}$
4) est décroissante sur $\mathbb{R}$

39. Soit f une fonction dérivable en $x_0 = 2$ et telle que $f(2) = 4$. Alors le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$ vaut

1) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x-4}$
2) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-4}$
3) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$
4) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-2}$

40. La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^2 e^{2t}$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

1) $f'(t) = 2te^{2t}$
2) $f'(t) = 2t(1+t)e^{2t}$
3) $f'(t) = t(2+t)e^{2t}$
4) $f'(t) = 4te^{2t}$

41. La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 2te^{(t^2)}$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

1) $f'(t) = 2e^{(t^2)}$
2) $f'(t) = 2(t+1)e^{(t^2)}$
3) $f'(t) = 4t^2 e^{(t^2)}$
4) $f'(t) = 2(2t^2+1)e^{(t^2)}$

42. Soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-4}$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent.
   1) la fonction f admet un maximum en $x_0 = 0$
   2) la fonction f admet un minimum en $x_0 = 0$
   3) est croissante sur $\mathbb{R}$
   4) est décroissante sur $\mathbb{R}$

43. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée de la fonction f définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{tg}\,(x))$?
   1) $\frac{1}{\sin(x)}$
   2) $\frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$
   3) $-\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$
   4) $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

44. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 4$. Déterminez l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent.
   1) La fonction f est croissante sur $]-2; +\infty[$.
   2) La fonction f est décroissante sur $]-2; +\infty[$.
   3) La fonction f admet un minimum (local) en $x = -2$.
   4) La fonction f admet un minimum (local) en $x = 4$.

45. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?
   1) Elle admet un extremum en $x = 0$
   2) Elle est croissante sur son domaine de définition
   3) Elle admet une dérivée première strictement positive
   4) Elle admet une dérivée seconde strictement positive