8. Dérivées et applications exercices

1. Calculer la dérivée de la fonction f suivante définie par l'expression donnée. Précisez sur quel intervalle le calcul est valide. Nous reverrons dans le prochain chapitre que ln est définie sur $]0;+\infty[$ et que $D\ln(x)=\frac{1}{x}$, pour tout $x>0$. De même, nous verrons que l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et que $De^x=e^x$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1) $f(x)=3x^2+2x-2$;
2) $f(t)=3t+\frac{1}{t}$
3) $f(t)=4t^2+\frac{1}{t^3}$
4) $f(x)=\frac{5}{x}$
5) $f(x)=(x^2-4x+3)^2$
6) $f(x)=3\sin(x)\text{tg}\,(x)$
7) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
8) $f(x)=(1-2x)(1+6x)$
9) $f(t)=(3t-5)^3$
10) $f(t)=t^2\sin^2(t)\cos(t)$
11) $f(t)=\frac{2t+1}{t^2+5t-1}$
12) $f(x)=x^4\sin^3 x$;
13) $f(x)=\sin(x^3)$;
14) $f(x)=1+\text{tg}\,^2x-\frac{1}{\cos^2 x}$;
15) $f(x)=1+\cos^2 x$;
16) $f(x)=x^2\cos(\text{tg}\,(x^2))$;
17) $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2+12x-30}$;
18) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$;
19) $f(x)=\text{tg}\,^2(3x)$;
20) $f(x)=(3x-5)(\sin(x)-3x^2)$;
21) $f(y)=(\text{tg}\,(y)+2)(\sin(y)-3)$;
22) $f(t)=\frac{(t^3+4t)}{(t^3-1)}$;
23) $f(x)=3x+\dfrac{1}{1+\text{tg}\,(x)}$;
24) $f(x)=3x^2\sin(x)+4x\cos(x)$;
25) $f(y)=\sqrt[3]{y^2-1}$;
26) $f(x)=\ln(x^2+2+\sin(x))$;
27) $f(y)=\ln(\cos(3y))$;
28) $f(z)=z^2e^{(z^2)}$;

1) $f'(x)=6x+2$;
2) $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}$
3) $f'(t)=8t-\frac{3}{t^4}$
4) $f'(x)=-\frac{5}{x^2}$
5) $f'(x)=2(2x-4)\left(x^2-4x+3\right)$
6) $f'(x)=3\sin(x)+3\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
7) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
8) $f'(x)=-4(6x-1)$
9) $f'(t)=9(3t-5)^2$
10) $f'(t)=t\sin(t)(2\sin(t)\cos(t)+2t\cos^2(t)-t\sin^2(t))$
11) $f'(t)=-\frac{2t^2+2t+7}{(t^2+5t-1)^2}$
12) $f'(x)=x^3\sin^2(x)(4\sin(x)+3x\cos(x))$;
13) $f'(x)=3x^2\cos\left(x^3\right)$;
14) $f'(x)=0$;
15) $f'(x)=-2\sin(x)\cos(x)$;
16) $f'(x)=-2x\left(x^2\sin\left(x^2\right)-\cos\left(x^2\right)\right)$;
17) $f'(x)=\frac{6\left(2x^2-13x-18\right)}{(x^2+12x-30)^2}$;
18) $f'(x)=-\frac{(\sin(x)-1)(\sin(x)+1)\cos(x)}{\left(\sin^2(x)+1\right)^2}$;
19) $f'(x)=\frac{6\text{tg}\,(3x)}{\cos^2(3x)}$;
20) $f'(x)=-27x^2+30x+3\sin(x)+3x\cos(x)-5\cos(x)$;
21) $f'(y)=\frac{1}{\cos^2(y)}(\sin(y)-3)+\cos(y)(\text{tg}\,(y)+2)$;
22) $f'(t)=-\frac{8t^3+3t^2+4}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$;
23) $f'(x)=3-\frac{1}{\cos^2(x)(1+\text{tg}\,(x))^2}$;
24) $f'(x)=3x^2\cos(x)+2x\sin(x)+4\cos(x)$;
25) $f'(y)=\frac{2y}{3\sqrt[3]{(y^2-1)^2}}$;
26) $f'(x)=\frac{2x+\cos(x)}{x^2+\sin(x)+2}$;
27) $f'(y)=-3\text{tg}\,(3y)$;
28) $f'(z)=2ze^{(z^2)}+2z^3e^{(z^2)}$;

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Pourquoi ?
On applique la définition. Le nombre dérivé serait la limite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. Nous savons que cette limite n'existe pas.
3. Déterminer dans chaque cas l'approximation linéaire L de la fonction f en le point x_0 donné :

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2$ et $x_0 = 1$;
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^4$ et $x_0 = 0$;
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 4$;
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ et $x_0 = 0$;
5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ et $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x^2)$ et $x_0 = 0$;
7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$ et $x_0 = 7$;
8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$ et $x_0 = 2$;
9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x^2-x+1}{\cos(x)}$ en $x_0 = 0$;
10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x^2-x+1}{\cos(x)}$ en $x_0 = 1$.

On a $L(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$, ce qui donne :

1) $L(x) = 3 + 6(x - 1)$
2) $L(x) = 0$
3) $L(x) = 53 + 26(x - 4)$
4) $L(x) = x$
5) $L(x) = 1$
6) $L(x) = 0$
7) $L(x) = 3x + 2$
8) $L(x) = 3x + 2$
9) $L(x) = 1 - x$
10) $L(x) = \frac{3}{\cos(1)} + \frac{5\cos(1)+3\sin(1)}{\cos^2(1)}(x - 1)$

Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f en le point x_0 donné ?
L'équation de la tangente est $y = L(x)$.
4. Pourquoi écrit-on dans certains livres $x \simeq 0 \Rightarrow \sin(x) \simeq x$?
Parce que l'approximation au premier ordre de sin en $x_0 = 0$ est $L(x) = x$.
5. Déterminer le point $x \in \mathbb{R}$ en lequel la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ s'annule. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum pour cette fonction. Comparez avec les résultats vus sur les fonctions du second degré.
La dérivée s'annule en $\frac{5}{2}$. Elle est négative sur $]-\infty; \frac{5}{2}[$ et positive sur $]\frac{5}{2}; +\infty; [$. On a bien un minimum. La formule pour le second degré donnait un extremum en $-\frac{b}{2a}$, et un minimum, si $a > 0$.
6. La fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Pourquoi ?
La fonction n'est pas continue en 1, car les limites à droite et à gauche existent et sont différentes. Comme elle n'est pas continue, en 1, elle n'est pas dérivable.
7. Déterminer la dérivée des fonctions arctg, arcsin et arccos.
On utilise le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
$$D\text{arctg}\,(y) = \frac{1}{D\text{tg}\,(x)}|_{x=\text{arctg}\,(y)} = \cos^2(\text{arctg}\,(y)).$$
On essaie d'avoir une forme un peu plus simple, et on y arrive en exprimant le cosinus en fonction de la tangente :
$$1 + \text{tg}^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

qui donne

$$\cos^2(u) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(u)}$$

Donc

$$\cos^2(\operatorname{arctg}(y)) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

De même,

$$D\arcsin(y) = \frac{1}{D\sin(x)}\Big|_{x=\arcsin(y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

On utilise $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$, et le fait que $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et a donc un cosinus positif, pour obtenir

$$D\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Enfin, les mêmes raisonnements donnent

$$D\arcsin(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

8. Déterminer pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{ax^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$$

admet un extremum en $x = -2$.
La dérivée de f est donnée sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ par

$$f'(x) = \frac{2a(-3+x)x - 2(3+x^2)}{(-3+2x+x^2)^2}.$$

Si la fonction admet un extremum en -2, la dérivée s'annule en -2. Donc le numérateur de la fraction est nul et on a

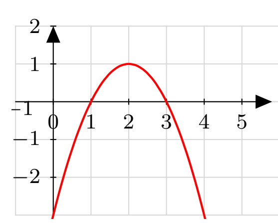
$$2a(-5)(-2) - 14 = 0,$$

et $a = 7/10$. Encore faut-il prouver que pour cette valeur, on a bien un extremum. Le signe de $f'(x)$ est le signe de

$$2\frac{7}{10}(-3+x)x - 2(3+x^2) = -\frac{3}{5}(2+x)(5+x).$$

On constate que la dérivée change de signe en -2, et qu'on a donc bien un extremum.

9. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on nécessairement déduire sur f ?



1) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 1$
2) La fonction f admet un maximum (local) en $x = 2$

3) ♡ La fonction f admet un maximum (local) en $x = 3$

4) La fonction f est croissante sur $]0;1[$.

On cherche des informations sur les variations de f. Elles sont données par le signe de sa dérivée. On peut extraire ces informations à partir de la représentation graphique :

x		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On constate que la dérivée de f s'annule en $x = 3$, qu'elle est strictement positive avant et strictement négative après. On a donc un maximum local en $x = 3$.

10. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7$$

est croissante.
On calcule la dérivée de f, et on obtient

$$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-3)(x-1).$$

On étudie le signe de cette expression (tableau de signes) et on obtient le résultat : les intervalles sont $[0;1]$, $[3;+\infty[$.

11. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et satisfaisant $f'(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit encore la fonction g définie par $g(x) = f(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g admet nécessairement un minimum en 0. Vrai ou faux ?
On peut calculer le signe de g', en écrivant

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = 4xf(x^2).$$

Puisque f est à valeurs strictement positives, $g'(x)$ a le signe de x. Donc il est négatif pour $x < 0$, nul en $x+$ à et positif pour $x > 0$. Donc g admet bien un minimum en 0.

12. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminez l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent, à propos de f.

1) ♡ Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

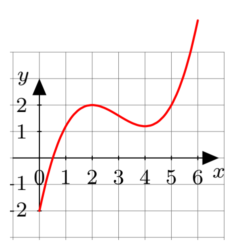
2) Elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Elle admet un minimum en $x = 1$.

4) Elle admet un maximum en $x = 1$.

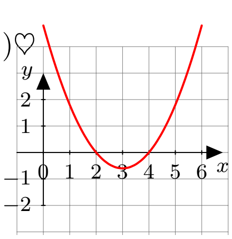
La dérivée est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

13. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ représentée (sur l'intervalle $]0,6[$) par le graphique suivant.

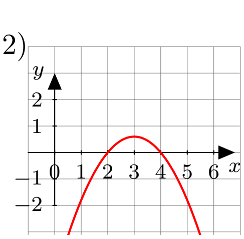


Quelle peut être la représentation graphique de la dérivée de f (sur l'intervalle $]0,6[$) ?

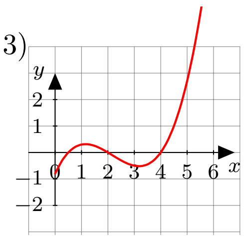
1)♡



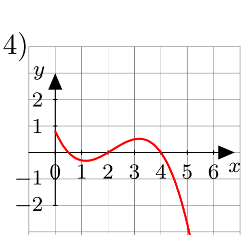
2)



3)

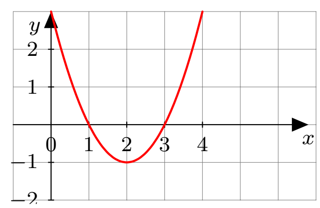


4)



On analyse les variations de f, et on déduit que la dérivée f' doit être positive jusque 2, négative entre 2 et 4 et positive pour les nombres supérieurs à 4.

14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est représentée (sur l'intervalle $]0,4[$) par le graphique suivant.



Déterminer l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent pour la fonction f :

1) elle est décroissante sur $]0,2[$
2) elle est croissante sur $]0,2[$
3) ♡ elle admet un maximum local au point d'abscisse $x = 1$
4) elle admet un minimum local au point d'abscisse $x = 2$

On cherche des informations sur les variations de f. Elles sont données par le signe de sa dérivée. On peut extraire ces informations à partir de la représentation graphique :

x		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On constate que la dérivée de f s'annule en $x = 1$, qu'elle est strictement positive avant et strictement négative après. On a donc un maximum local en $x = 1$.

15. Déterminer les extrema (locaux) de

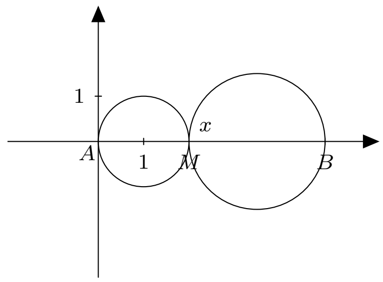
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 3t^2 - 6t - 1\,;$
2) $g : [-1,4] \to \mathbb{R} : y \mapsto 3y^3 - 9y^2 + 8\,;$

La fonction f admet un minimum local en $t = 1$.
La dérivée de la fonction g, sur $]-1;4[$, vaut $9y^2 - 18y = 9y(y-2)$. Son signe est simple à étudier, et on l'étudie sur un intervalle plus large, pour voir le comportement en -1 et en 4.

x		-1		0		2		4	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

On a un minimum local en -1 et en 2, et un maximum local en 0 et en 4.

16. On considère un segment $[A,B]$ de longueur a et un point M de $[A,B]$. On considère les disques de diamètres $[A,M]$ et $[M,B]$. Déterminer quand la somme des aires de ces disques est minimale.
Définissons un repère orthonormé dont le premier axe est la droite AB et l'origine est A. On a alors la situation suivante :



$$S(x) = \pi(\frac{x}{2})^2 + \pi(\frac{a-x}{2})^2.$$

Pour trouver les extrema de S, on doit chercher les points stationnaires de S sur $]a, b[$, et comparer avec la valeur de S en 0 et en a. On a $S'(x) = \pi\frac{x}{2} - \pi\frac{a-x}{2} = \frac{\pi}{2}(2x-a)$. Cette fonction s'annule quand $x = \frac{a}{2}$, c'est à dire quand M est le milieu du segment $[A, B]$. La fonction S' est négative sur $]0, \frac{a}{2}[$ et positive sur $]\frac{a}{2}, a[$. On en déduit que S admet un minimum global en $x = \frac{a}{2}$, en utilisant la continuité de S sur $[0, a]$. Si on ne veut pas utiliser la continuité, on compare avec $S(0) = \pi\frac{a^2}{4} = S(a)$. On voit que la valeur en $\frac{a}{2}$ (c'est-à-dire $\frac{\pi a^2}{8}$) est strictement inférieure.

17. Aux quatre coins d'une feuille carrée en carton de côté a, on enlève des carrés égaux. Déterminer pour quels carrés enlevés la boite obtenue en pliant les bords de la forme obtenue a un volume maximal.

 On fait un dessin pour voir ce qui se passe. Notons x le côté du carré qui est enlevé. Ce sera aussi la hauteur de la boîte. Le nombre x appartient à l'ensemble $[0; \frac{a}{2}]$. Le volume de la boîte est donné en fonction de x par $V(x) = x(a-2x)^2$. Cette fonction est dérivable sur un intervalle plus large que $[0; \frac{a}{2}]$. Sa dérivée est

$$V'(x) = (a-2x)^2 - 4x(a-2x) = (a-2x)(a-6x).$$

 Le signe de la dérivé est facile à étudier :

x		0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$	
$V'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

 Le volume est donc maximal en $x = \frac{a}{6}$, et minimal en $x = 0$ et $x = \frac{a}{2}$.

18. On inscrit un rectangle dans un cercle de rayon R. Déterminer quand ce rectangle a une aire maximale.

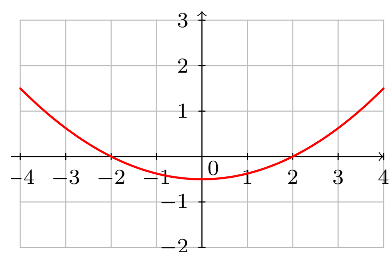
 Puisque le problème est invariant par rotation autour du centre du cercle, on peut fixer un systèmes d'axes orthonormés au centre du cercle, et supposer que tous les rectangles ont des côtés parallèles aux axes. Un rectangle est alors déterminé par la position de son sommet S situé dans le premier cadrant.

 Si on paramètre le problème par l'abscisse de S, alors S a pour coordonnées $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$, où $x \in [0; R]$, et la fonction à optimiser est $A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$. On sait que cette fonction est positive ou nulle et admet un minimum et un maximum sur l'intervalle considéré (bornes atteintes). Le minimum est atteint pour $x = 0$ et $x = R$. Pour déterminer les maxima, on dérive la fonction, et on étudie le signe de la dérivée. Le maximum est unique et il est atteint en $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire quand le rectangle est un carré.

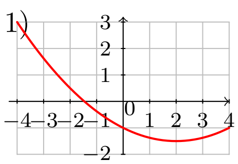
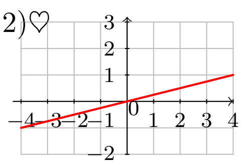
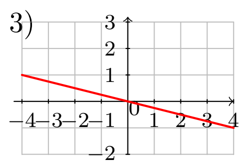
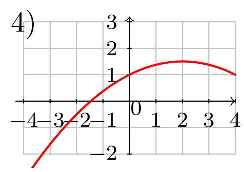
 Si on paramètre la position de S par l'angle orienté θ entre le premier vecteur du repère et $\overrightarrow{OS}$, alors S a pour coordonnées $(R\cos(\theta); R\sin(\theta))$, où $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. La fonction à optimiser est $A(\theta) = 4R^2\cos(\theta)\sin(\theta) = 2R^2\sin(2\theta)$. Nul besoin des dérivées pour voir que cette fonction atteint un maximum en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

19. Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit de volume V donné et de surface minimale (bases comprises).
Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte. La fonction à optimiser est la surface. Elle dépend du rayon de la base et de la hauteur. La contrainte exprime qu'on ne considère que des cylindres dont le rayon est V. On ne connaît pas V, mais il est fixe. Notons r le rayon de la base du cylindre et h la hauteur du cylindre. Ce sont deux nombres (strictement) positifs. La fonction à optimiser est
$$A(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$
C'est une fonction de deux variables, et on n'en a pas encore rencontré. Mais de toute façon, les nombres r et h ne sont pas indépendants l'un de l'autre puisqu'on a une contrainte :
$$\pi r^2 h = V.$$
On peut donc exprimer r en fonction de h ou h en fonction de r, et injecter la valeur dans la fonction A. On a $h = \frac{V}{\pi r^2}$, donc
$$A(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$
On procède comme d'habitude $A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$, donc l'aire minimale est atteinte pour $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

20. Considérons la fonction f dont la représentation graphique est la suivante (sur l'intervalle $]-4,4[$).



Déterminer parmi les représentations graphiques suivantes celle de la dérivée f' de f.

1)

2)♡

3)

4)


21. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit la fonction g définie par $g(x) = x + f(x^2)$. Calculez $g'(0)$.

1) 0
2) ♡ 1
3) 2
4) c'est impossible à déterminer

22. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2 e^{2t}$. Quelle est l'expression de la fonction dérivée f' ?

1) $f'(t) = 2te^{2t}$
2) ♡ $f'(t) = 2t(1+t)e^{2t}$
3) $f'(t) = t(2+t)e^{2t}$
4) $f'(t) = 4te^{2t}$

23. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2\ln(x^3)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

   1) $f'(x) = \frac{6}{x^2}$
   2) $f'(x) = 6x\ln(x^3) + \frac{3}{x}$
   3) $f'(x) = 6x\ln(x^3) + 9x$
   4) ♡ $f'(x) = 3x(2\ln(x^3) + 3)$

24. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

   1) ♡ $f'(x) = -\frac{8}{(x-1)^2}$
   2) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$
   3) $f'(x) = -\frac{8}{(3x+5)^2}$
   4) $f'(x) = \frac{8}{(x-1)^2}$

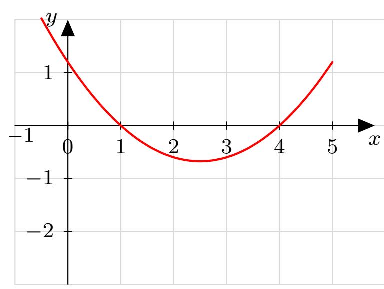
25. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin(2x)}$?

   1) $f'(x) = -2e^{\sin(2x)}\cos(2x)$
   2) ♡ $f'(x) = 2e^{\sin(2x)}\cos(2x)$
   3) $f'(x) = e^{2\cos(2x)}$
   4) $f'(x) = e^{\sin(2x)}$

26. Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 1 + \cos^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

   1) ♡ elle est croissante
   2) elle est décroissante
   3) elle est impaire
   4) elle est paire

27. La figure suivante donne une partie de la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on nécessairement déduire sur f ?



   1) La fonction f s'annule en $x = 1$.
   2) La fonction f admet un minimum (local) en $x = 2.5$.
   3) La fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2.5$.
   4) ♡ La fonction f admet un maximum (local) en $x = 1$.

28. Soit g une fonction à valeurs strictement positives et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours vraie ?

   1) $(\ln(g(x)))' > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   2) ♡ $(\ln(g(x)))' \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   3) $(\ln(g(x)))' < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   4) $(\ln(g(x)))' \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

29. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $f'(x) = -\frac{1}{1+x^{-2}}$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

1) $f(0) = 0$.
2) $f(1) < f(10)$
3) ♡ $f(1) > f(10)$
4) $f(10) = 0$

30. Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\sqrt{2}\,x\right)$. Quelle est l'expression de la fonction dérivée de f ?
    1) $f'(x) = -\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$
    2) ♡ $f'(x) = -\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}$
    3) $f'(x) = \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}$
    4) $f'(x) = \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)\sqrt{2}x$

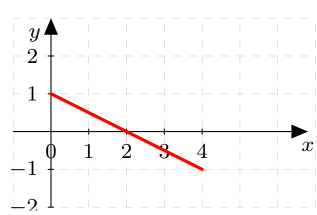
31. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\cos(x^2)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?
    1) ♡ $f'(x) = 2x(\cos(x^2) - x^2\sin(x^2))$
    2) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) + x^2\sin(x^2))$
    3) $f'(x) = x(\cos(x^2) - x\sin(x^2))$
    4) ♡ $f'(x) = x(\cos(x^2) + x\sin(x^2))$

32. Parmi les fonctions f qui suivent, quelle est la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$?
    1) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
    2) ♡ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
    3) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
    4) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

33. Parmi les propositions suivantes, laquelle donne l'expression de la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sin^2(x^3)$?
    1) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + \cos(x^3))$
    2) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 6x^3)$
    3) ♡ $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 6x^3\cos(x^3))$
    4) $\sin(x^3)(\sin(x^3) + 2x\cos(x^3))$

34. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. Que vaut $f'(2)$?
    1) $-\frac{13}{3}$
    2) ♡ $-\frac{13}{9}$
    3) $\frac{19}{9}$
    4) $\frac{19}{3}$

35. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est représentée (sur l'intervalle $]0,4[$) par le graphique suivant.



Que peut-on nécessairement en déduire sur la fonction f ?
    1) Elle est croissante sur $]3,4[$
    2) Elle est décroissante sur $]0,2[$
    3) Elle admet un minimum local en $x = 2$
    4) ♡ Elle admet un maximum local en $x = 2$

36. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(3x^2)$. Parmi les propositions suivantes, déterminer l'expression de la dérivée de f.

1) $f'(x) = -\sin^2(3x^2)$
2) $f'(x) = -2\,\sin(6x)$
3) $f'(x) = -9x^2\,\sin(6x^3)$
4) ♡ $f'(x) = -12x\,\sin(3x^2)\,\cos(3x^2)$

37. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x^2)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

    1) $f'(x) = -\sin(x^2)$
    2) $f'(x) = -2x\sin(x^2)$
    3) $f'(x) = \cos(x^2) - \sin(x^2)$
    4) ♡ $f'(x) = \cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)$

38. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^3 - 3x^2 + 3x + 2)^3$

    1) admet un maximum en $x_0 = 1$
    2) admet un minimum en $x_0 = 1$
    3) ♡ est croissante sur $\mathbb{R}$
    4) est décroissante sur $\mathbb{R}$

39. Soit f une fonction dérivable en $x_0 = 2$ et telle que $f(2) = 4$. Alors le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$ vaut

    1) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x-4}$
    2) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-4}$
    3) ♡ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$
    4) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-2}$

40. La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^2e^{2t}$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

    1) $f'(t) = 2te^{2t}$
    2) ♡ $f'(t) = 2t(1+t)e^{2t}$
    3) $f'(t) = t(2+t)e^{2t}$
    4) $f'(t) = 4te^{2t}$

41. La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 2te^{(t^2)}$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

    1) $f'(t) = 2e^{(t^2)}$
    2) $f'(t) = 2(t+1)e^{(t^2)}$
    3) $f'(t) = 4t^2e^{(t^2)}$
    4) ♡ $f'(t) = 2(2t^2+1)e^{(t^2)}$

42. Soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-4}$. Déterminer l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent.
    1) ♡ la fonction f admet un maximum en $x_0 = 0$
    2) la fonction f admet un minimum en $x_0 = 0$
    3) est croissante sur $\mathbb{R}$
    4) est décroissante sur $\mathbb{R}$

43. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée de la fonction f définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{tg}\,(x))$?
    1) $\frac{1}{\sin(x)}$
    2) $\frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$
    3) $-\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$
    4) ♡ $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

44. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 4$. Déterminez l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent.

1) La fonction f est croissante sur $]-2;+\infty[$.

2) La fonction f est décroissante sur $]-2;+\infty[$.

3) ♡ La fonction f admet un minimum (local) en $x=-2$.

4) La fonction f admet un minimum (local) en $x=4$.

45. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

    1) Elle admet un extremum en $x=0$

    2) ♡ Elle est croissante sur son domaine de définition

    3) Elle admet une dérivée première strictement positive

    4) Elle admet une dérivée seconde strictement positive