Mathématique

Equations différentielles

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Exemples introductifs I

En l'absence de contrainte matérielle, on peut postuler qu'une population de bactéries croît proportionnellement au nombre de bactéries.

En supposant (c'est une approximation) que le nombre d'individus $P(t)$ est une fonction dérivable du temps t, et qu'en $t = 0$, il y a un nombre donné P_0 d'individus, la population de bactéries satisfait l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = kP(t),}$$

où k est la constante de proportionnalité, et la condition initiale

$$\boxed{P(0) = P_0.}$$

On cherche à déterminer une (unique) fonction P satisfaisant ces conditions (si possible). On a une équation différentielle, d'ordre 1, homogène, et à coefficients constants.

Exemples introductifs II : une loi de Newton

La loi de Newton (sur les températures)

Le taux de variation (instantané) de la température T d'un objet isolé dans un milieu à température T_e est proportionnel à la différence en la température de l'objet et la température T_e.

- On note $T(t)$ la température à l'instant t.
- On a $DT(t) = k(T(t) - T_e)$, $(k < 0)$ pour tout t ou

$$\boxed{DT(t) - kT(t) = -kT_e.}$$

- On se ramène au cas précédent si $T_e = 0$, mais en général on a une équation différentielle, d'ordre 1, non homogène.
- Il faut également une condition initiale $T(0) = T_0$ pour fixer une solution unique.

Exemples introductifs III : une loi célèbre de Newton

Le ressort

Un mobile de masse m est attaché à un ressort et glisse sur un axe horizontal. Déterminer sa position à tout instant.

- On utilise la loi $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, sur la droite, sans frottements ;
- Notons $x(t)$ la position (coordonnée) du mobile au temps t, où la position de repos est $x = 0$;
- La force est proportionnelle à la distance entre la position et la position de repos ;
- On peut l'écrire $F(x(t)) = -kx(t)$;

On a donc $mx''(t) = -kx(t)$, qui est équivalente à l'équation différentielle d'ordre 2, homogène et à coefficients constants :

$$\boxed{x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.}$$

On peut se donner des conditions initiales : $x(0) = x_0$, et/ou $x'(0) = v_0$.

Exemples introductifs IV : l'équation de Verhulst

Croissance non exponentielle

En présence de contraintes matérielles, (nourriture, espace, ressources), le taux de croissance d'une population n'est plus proportionnel au nombre d'individus. Quand la population s'approche d'une valeur limite L, la croissance tend vers 0.

- On note $P(t)$ la populaion au temps t, que l'on considère dérivable.
- Quand $P(t)$ est proche de 0, la croissance est proportionnelle $P(t)$.
- On ajoute un facteur qui fait tendre la croissance vers 0 quand $\frac{P(t)}{L}$ est proche de 1.

Le modèle le plus simple postule que $P(t)$ suit l'équation non linéaire, à coefficients non constants, à variables séparées

$$\boxed{P'(t) = kP(t)(1 - \frac{P(t)}{L}),}$$

où k et L sont des constantes positives.

C'est un modèle de croissance logistique.

Equation différentielles linéaires à coef. constants

- Une équation différentielle linéaire à coefficients constants (EDLCC) est une équation de la forme

$$c_p D^p u(x) + c_{p-1} D^{p-1} u(x) + \cdots + c_1 Du(x) + c_0 u(x) = g(x).$$

- g est donnée et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Les coefficients $c_0, \ldots, c_p$ sont des nombres réels.
- L'inconnue est la fonction u, qui est p fois dérivable sur I.
- L'équation est d'ordre p si $c_p \neq 0$.
- L'équation est homogène si g est la fonction nulle.

Exemples :

- L'équation $D^2 u(x) + 9u(x) = 0$ est une EDLCC d'ordre 2, homogène
- L'équation $Du(x) + 3u(x) = 3x$ est une EDLCC d'ordre 1, non homogène.
- Les équations

$$\sin(x) D^2 u(x) + \cos(x) Du(x) = 3 \quad \text{et} \quad (Du(x))^2 + 3u(x) = 0$$

ne sont pas des EDLCC.

Solutions particulières

- La fonction u définie par $u(x) = \cos(3x)$ satisfait l'équation

$$D^2 u(x) + 9u(x) = 0.$$

  C'est une *solution particulière* de cette équation.
- La fonction u définie par $u(x) = x - \frac{1}{3}$ satisfait l'équation

$$Du(x) + 3u(x) = 3x.$$

  C'est une *solution particulière* de cette équation.
- Question : Y a-t-il d'autres solutions ?

Solutions particulières

- La fonction u définie par $u(x) = \cos(3x)$ satisfait l'équation
$$D^2u(x) + 9u(x) = 0.$$
C'est une *solution particulière* de cette équation.
- La fonction u définie par $u(x) = x - \frac{1}{3}$ satisfait l'équation
$$Du(x) + 3u(x) = 3x.$$
C'est une *solution particulière* de cette équation.
- Question : Y a-t-il d'autres solutions ?
- Reponse : Oui, par exemple la fonction u_1 définie par
$$u_1(x) = x - \frac{1}{3} + e^{-3x}.$$
- Trouver la solution générale de l'équation, c'est trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation.

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : un exemple

Résoudre l'équation $Du(x) = 4u(x)$ (sur $\mathbb{R}$).

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : un exemple

Résoudre l'équation $Du(x) = 4u(x)$ (sur $\mathbb{R}$).

- Une solution est donnée par $u(x) = e^{4x}$.
- D'autres solutions sont données par

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : un exemple

Résoudre l'équation $Du(x) = 4u(x)$ (sur $\mathbb{R}$).

- Une solution est donnée par $u(x) = e^{4x}$.
- D'autres solutions sont données par $u(x) = 5e^{4x}$, ou $10e^{4x}$, ou Ce^{4x}.
- C'est une propriété des équations linéaires homogènes : si on additionne ou multiplie des solutions par des constantes, cela reste des solutions (principe de superposition).
- Y a-t-il d'autres solutions ? Comment prouver qu'une fonction u s'écrit nécessairement $u(x) = Ce^{4x}$.

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : un exemple

Résoudre l'équation $Du(x) = 4u(x)$ (sur $\mathbb{R}$).

- Une solution est donnée par $u(x) = e^{4x}$.
- D'autres solutions sont données par $u(x) = 5e^{4x}$, ou $10e^{4x}$, ou Ce^{4x}.
- C'est une propriété des équations linéaires homogènes : si on additionne ou multiplie des solutions par des constantes, cela reste des solutions (principe de superposition).
- Y a-t-il d'autres solutions ? Comment prouver qu'une fonction u s'écrit nécessairement $u(x) = Ce^{4x}$.
- Cette condition est équivalente au fait que la fonction v définie par

$$v(x) = \frac{u(x)}{e^{4x}} = e^{-4x}u(x)$$

est constante. Ou encore à $Dv(x) = 0$.

Mais on a

$$Dv(x) = D(e^{-4x}u(x)) = -4e^{-4x}u(x) + e^{-4x}Du(x) = e^{-4x}(Du(x) - 4u(x)).$$

Donc l'équation $e^{-4x}(Du(x) - 4u(x)) = 0$ est équivalente à l'équation $Dv(x) = 0$, et on a résolu l'équation.

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : quelques exemples

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- $3Du(x) + 12u(x) = 0$;
- $5Du(x) - 4u(x) = 0$;
- $7Du(x) + 4u(x) = 0$;
- $12Du(x) - 6u(x) = 0$
- $c_1 Du(x) + c_0 u(x) = 0$ ($c_1 \neq 0$).

Comment trouver rapidement le coefficient à indiquer dans l'exponentielle ?

EDLCC Homogènes d'ordre 1 : le résultat

Proposition

La solution générale de l'EDLCC homogène d'ordre 1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$c_1 Du(x) + c_0 u(x) = 0 \quad (c_1 \neq 0)$$

est donnée par

$$u(x) = Ce^{-\frac{c_0}{c_1}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

- On vérifie que les fonctions proposées sont bien des solutions.
- On constate que si u est une solution, la fonction v définie sur I par

$$v(x) = e^{\frac{c_0}{c_1}x} u(x)$$

a une dérivée nulle sur I.

Remarque : le nombre $-\frac{c_0}{c_1}$ est la solution de l'équation auxiliaire

$$c_1 z + c_0 = 0.$$

Faits importants

- Il suffit de se rappeler que la solution générale est de la forme Ce^{rx} où r est à déterminer.
- Si on injecte cette forme dans l'équation, on voit que r est solution de l'équation auxiliaire
$$c_1 z + c_0 = 0.$$
Cette équation est obtenue en remplaçant D^k par z^k ($k \in \{0; 1\}$).
- On a posé $v(x) = e^{-rx}u(x)$ pour transformer l'équation en un problème de primitivation :
$$Dv(x) = e^{-rx}(Du(x) - r(u(x)) = \frac{e^{-rx}}{c_1}(c_1 Du(x) + c_0 u(x)) \quad (1)$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $5Du(x) + 3u(x) = 0$.

- L'équation auxiliaire associée est $5z + 3 = 0$.
- La solution de cette équation est $z = -\frac{3}{5}$.
- La solution générale de l'équation différentielle est donc
$$u(x) = Ce^{-\frac{3}{5}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exemple I

Résoudre l'équation différentielle $DP(t) = kP(t)$ où k est une constante réelle non nulle, avec la condition $P(0) = P_0$.

- L'équation s'écrit $DP(t) - kP(t) = 0$
- L'équation auxiliaire associée est $z - k = 0$.
- La solution de cette équation est $z = k$.
- La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- La solution satisfait la condition initiale $P(0) = P_0$ si et seulement si $C = P_0$.
- La solution cherchée est donc

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{kt}.}$$

On a donc bien une croissance exponentielle.

EDLCC d'ordre 1, un exemple

Résoudre l'équation différentielle $Du(x) + 2u(x) = 3x$ sur $\mathbb{R}$.

- Ce n'est pas une équation homogène, à cause du terme indépendant.
- L'équation homogène associée serait $Du(x) + 2u(x) = 0$. L'équation auxiliaire serait $z + 2 = 0$ et les solutions Cu_1 où $u_1(x) = e^{-2x}$ est la solution fondamentale.
- La substitution gagnante était $v(x) = e^{2x}u(x)$. Que donne-t-elle ici ?

EDLCC d'ordre 1, un exemple

Résoudre l'équation différentielle $Du(x) + 2u(x) = 3x$ sur $\mathbb{R}$.

- Ce n'est pas une équation homogène, à cause du terme indépendant.
- L'équation homogène associée serait $Du(x) + 2u(x) = 0$. L'équation auxiliaire serait $z + 2 = 0$ et les solutions Cu_1 où $u_1(x) = e^{-2x}$ est la solution fondamentale.
- La substitution gagnante était $v(x) = e^{2x}u(x)$. Que donne-t-elle ici ?
- Puisque $Dv(x) = e^{2x}(Du(x) + 2u(x))$, l'équation est équivalente à

$$Dv(x) = e^{2x}(3x)$$

On trouve

$$v(x) = \int e^{2x}(3x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\int e^{2x}(3x)\,\mathrm{d}x$ désigne toute primitive de la fonction, puis

$$\begin{aligned} u(x) = e^{-2x}v(x) &= e^{-2x}(\int e^{2x}(3x)\,\mathrm{d}x) \\ &= e^{-2x}(\frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3e^{2x}}{4} + C) = \frac{3x}{2} - \frac{3}{4} + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Remarque : On peut décomposer la solution.

EDLCC d'ordre 1, méthode générale

- On considère une équation du type

$$(G) \quad c_1 Du(x) + c_0 u(x) = g(x),$$

  sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- On résout l'équation auxiliaire $c_1 z + c_0 = 0$. On trouve la solution $r = -\frac{c_0}{c_1}$.
- Pour toute fonction u, on pose $v(x) = e^{-rx} u(x)$. L'équation (G) est alors équivalente à

$$Dv(x) = \frac{e^{-rx} g(x)}{c_1}.$$

- On trouve v puis on en déduit u.

EDLCC d'ordre 1, non homogène, le résultat

Proposition

La solution générale de l'équation

$$(G) : \; c_1 Du(x) + c_0 u(x) = g(x)$$

est donnée par

$$u(x) = e^{rx} \left(\int e^{-rx} \frac{g(x)}{c_1} \, \mathrm{d}x \right),$$

où r est la solution solution de l'équation auxiliaire associée à (G).

Nous venons de faire la preuve.

Remarques :

1. Diviser l'équation de départ par c_1 le fait “disparaître”. La formule est plus simple.
2. La constante de primitivation fait apparaître Ce^{rx} dans la solution. C'est la solution de l'équation homogène associée.
3. On multiplie g en dehors de $\int$ par e^{rx} et dans la primitive par son inverse e^{-rx}.

Encore un exemple

Résoudre l'équation différentielle $Du(x) + 2u(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

- L'équation auxiliaire s'écrit $z + 2 = 0$ et admet $z = -2$ comme solution.
- La solution s'écrit donc
$$e^{-2x}\left(\int e^{2x} xe^x \, \mathrm{d}x\right) = e^{-2x}\left(\int xe^{3x} \, \mathrm{d}x\right),$$
- On primitive par parties :
$$\int xe^{3x} \, \mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
La solution générale est donc
$$u(x) = \left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C\right) e^{-2x} = \frac{xe^x}{3} - \frac{e^x}{9} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
- **Remarque :** On a encore la même structure des solutions.

Structure des solutions

Définition

L'*équation homogène* associée à l'EDLCC

$$(G) \quad c_p D^p u(x) + c_{p-1} D^{p-1} u(x) + \cdots + c_1 D u(x) + c_0 u(x) = g(x)$$

est l'équation

$$(H): \quad c_p D^p u(x) + c_{p-1} D^{p-1} u(x) + \cdots + c_1 D u(x) + c_0 u(x) = 0.$$

Proposition

Si C est un nombre et si u_1 et u_2 sont solutions de (H), alors $u_1 + u_2$ et Cu_1 sont solutions de (H).

Proposition

Soit f_0 une solution particulière de (G). Si f_h est une solution de (H), alors $f_0 + f_h$ est une solution de (G). Réciproquement, toute solution de (G) est de cette forme.

Méthode de résolution générale

Pour obtenir toutes les solutions de (G), il suffit donc de

1. Trouver toutes les solutions f_h de l'équation homogène (H) ;
2. Trouver une solution particulière f_0 de l'équation générale (G) ;
3. Les additionner.

Ce n'est pas ce que nous avons fait pour les équations d'ordre 1, mais cela permet de diviser le problème en deux sous-problèmes plus simples.

Solution de l'exemple II

L'équation à résoudre est $DT(t) - kT(t) = -kT_e$, où k est une constante négative.

- L'équation auxiliaire associée est $z - k = 0$, la solution est $r = k$.
- La solution générale de l'équation est donc

$$T(t) = e^{kt} \int e^{-kt}(-kT_e)\,\mathrm{d}t = e^{kt}(\frac{-kT_e\,e^{-kt}}{-k} + C)$$

où C est une constante réelle. On a donc après simplification

$$T(t) = T_e + Ce^{kt}.$$

On fixe la constante C par l'équation $T(0) = T_0$ et on trouve

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{kt}.$$

Puisque $k < 0$, on retrouve bien que la température converge vers T_e quand t tend vers l'infini.

EDLCC Homogènes d'ordre 2, exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $D^2u(x) - 5Du(x) + 6u(x) = 0$.

- On cherche des solutions. Quelles familles de fonctions investiguer ?

EDLCC Homogènes d'ordre 2, exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $D^2u(x) - 5Du(x) + 6u(x) = 0$.

- On cherche des solutions. Quelles familles de fonctions investiguer ?
- Ben... les exponentielles ont donné de bon résultats jusqu'à présent.
- A quelles conditions $u(x) = e^{rx}$ est-elle solution ?
- On retrouve l'équation auxiliaire : c'est le cas si r est solution de

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

  Or $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$: on a deux solutions

$$u_1(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad u_2(x) = e^{3x}.$$

- Par le principe de superposition $u(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ est solution pour tous $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.
- Il n'y a pas d'autre solution : on montre

$$D^2u(x) - 5Du(x) + 6u(x) = 0 \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : u(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

La preuve, pour voir comment généraliser

On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
&\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : u(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\
&\Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} : e^{-3x} u(x) = C_1 e^{-3x} e^{2x} + C_2 \\
&\Leftrightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R} : D(e^{-3x} u(x)) = D(C_1 e^{-x}) = -C_1 e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R} : e^{x} D(e^{-3x} u(x)) = C_1 \\
&\Leftrightarrow D(e^{x} D(e^{-3x} u(x))) = 0.
\end{aligned}
$$

On utilise la formule

$$D(e^{ax} f(x)) = e^{ax}(Df(x) + af(x)) = e^{ax}(D + aI)f(x),$$

pour obtenir

$$
\begin{aligned}
D(e^{x} D(e^{-3x} u(x))) &= D(e^{x} e^{-3x}(D - 3I)u(x)) = e^{-2x}(D - 2I)(D - 3I)u(x) \\
&= e^{-2x}(D^2 - 5D + 6I)u(x)
\end{aligned}
$$

Conclusions :

1. On a bien démontré l'équivalence et on a donc toutes les solutions
2. On a factorisé l'opérateur $D^2 - 5D + 6I$ comme le polynôme caractéristique (auxiliaire), et on peut se ramener à deux équations d'ordre 1.

Extension au cas non homogène

Pour l'équation homogène $D^2u(x) - 5Du(x) + 6u(x) = 0$:

- l'équation auxiliaire s'écrit $z^2 - 5z + 6 = 0$ et admet les solutions $z = 2$ et $z = 3$.
- On a les factorisations

$$z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3) \quad \text{et} \quad D^2 - D + 6I = (D-2I)(D-3I).$$

- Les solutions sont les fonctions $C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour l'équation non homogène $D^2u(x) - 5Du(x) + 6u(x) = g(x)$:

- l'équation auxiliaire est la même, donc on garde la factorisation et on a l'équation

$$(D-2I)(D-3I)u = g$$

En posant $v = (D-3I)u$, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} Du(x) - 3u(x) = v(x) \\ Dv(x) - 2v(x) = g(x). \end{cases}$$

On peut résoudre ce système en deux étapes : ce sont deux équations d'ordre 1.

Le résultat général, dans le cas $\Delta \geqslant 0$

On considère l'équation $(G) \quad D^2u(x) + c_1 Du(x) + c_0 u(x) = g(x)$.
L'équation auxiliaire s'écrit $z^2 + c_1 z + c_0 = 0$.

Proposition

Si l'équation auxiliaire a deux solutions r_1, r_2 éventuellement égales, alors l'équation (G) est équivalente à

$$\begin{cases} Du(x) - r_1 u(x) = v(x) \\ Dv(x) - r_2 v(x) = g(x). \end{cases}$$

Dans le cas homogène ($g = 0$), cette équation est facile à résoudre :

Proposition

La solution générale de l'équation homogène associée est donnée par

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ et}$$

- *Si $\Delta > 0$, $u_1(x) = e^{r_1 x}$ et $u_2(x) = e^{r_2 x}$, où r_1, r_2 sont sol. de l'éq. auxiliaire*
- *Si $\Delta = 0$, $u_1(x) = e^{rx}$ et $u_2(x) = xe^{rx}$ où r est sol. de l'éq. auxiliaire.*

Quelques exercices

Déterminer la solution générale des équations homogènes suivantes.

1. $2D^2u(x) + 2Du(x) - 12u(x) = 0$;
2. $D^2u(x) - 9u(x) = 0$;
3. $D^2u(x) + 2Du(x) + u(x) = 0$.

Déterminer les solutions générales des équations suivantes.

1. $2D^2u(x) + 2Du(x) - 12u(x) = e^{2x}$;
2. $D^2u(x) - 9u(x) = x$;
3. $D^2u(x) + 2Du(x) + u(x) = e^x$.

Le cas $\Delta < 0$, un exemple, et un résultat partiel

- L'équation du ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- L'équation auxiliaire est $z^2 + \omega^2 = 0$. On a donc $\Delta < 0$. Que faire ?
- Voici un exemple numérique $(H) \quad D^2 u(x) + 4u(x) = 0$

Le cas $\Delta < 0$, un exemple, et un résultat partiel

- L'équation du ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- L'équation auxiliaire est $z^2 + \omega^2 = 0$. On a donc $\Delta < 0$. Que faire ?
- Voici un exemple numérique $(H) \quad D^2u(x) + 4u(x) = 0$
- On cherche des solutions

Le cas $\Delta < 0$, un exemple, et un résultat partiel

- L'équation du ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- L'équation auxiliaire est $z^2 + \omega^2 = 0$. On a donc $\Delta < 0$. Que faire ?
- Voici un exemple numérique $(H) \quad D^2 u(x) + 4u(x) = 0$
- On cherche des solutions et on trouve $u_1(x) = \sin(2x)$ et $u_2(x) = \cos(2x)$.

Le cas $\Delta < 0$, un exemple, et un résultat partiel

- L'équation du ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- L'équation auxiliaire est $z^2 + \omega^2 = 0$. On a donc $\Delta < 0$. Que faire ?
- Voici un exemple numérique $(H) \quad D^2 u(x) + 4u(x) = 0$
- On cherche des solutions et on trouve $u_1(x) = \sin(2x)$ et $u_2(x) = \cos(2x)$.
- Par le principe de superposition, on a les solutions $C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$ ou $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- On montre qu'il n'y en a pas d'autre, comme dans le cas $\Delta \geqslant 0$, en divisant par $\cos(2x)$ sur chaque intervalle où il ne s'annule pas. Il y a une jolie subtilité aux bornes de l'intervalle,... que je vous passe.

Le cas $\Delta < 0$, un exemple, et un résultat partiel

- L'équation du ressort s'écrit $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- L'équation auxiliaire est $z^2 + \omega^2 = 0$. On a donc $\Delta < 0$. Que faire ?
- Voici un exemple numérique $(H) \quad D^2 u(x) + 4u(x) = 0$
- On cherche des solutions et on trouve $u_1(x) = \sin(2x)$ et $u_2(x) = \cos(2x)$.
- Par le principe de superposition, on a les solutions $C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$ ou $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- On montre qu'il n'y en a pas d'autre, comme dans le cas $\Delta \geqslant 0$, en divisant par $\cos(2x)$ sur chaque intervalle où il ne s'annule pas. Il y a une jolie subtilité aux bornes de l'intervalle,... que je vous passe.

Proposition

L'équation homogène $D^2 u(x) + \omega^2 u(x) = 0$ admet les solutions

$$u(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cette solution peut aussi s'écrire $u(x) = A \sin(\omega x + \phi)$, où $A \geqslant 0$ et $\phi \in [0; 2\pi[$. Cette fonction est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Le cas $\Delta < 0$, le cas homogène général, exemple

Considérons équation $D^2u(x) + 4Du(x) + 13u(x) = 0$, sur $\mathbb{R}$.

- L'équation auxiliaire s'écrit $z^2 + 4z + 13 = 0$.
- On a $\Delta = 16 - 52 = -36$, donc pas de sol. dans $\mathbb{R}$ et pas de factorisation ;
- Mais $z^2 + 4z + 13 = (z + 2)^2 + 9$ (voir les fonctions du second degré) ;

Le cas $\Delta < 0$, le cas homogène général, exemple

Considérons équation $D^2 u(x) + 4Du(x) + 13u(x) = 0$, sur $\mathbb{R}$.

- L'équation auxiliaire s'écrit $z^2 + 4z + 13 = 0$.
- On a $\Delta = 16 - 52 = -36$, donc pas de sol. dans $\mathbb{R}$ et pas de factorisation ;
- Mais $z^2 + 4z + 13 = (z+2)^2 + 9$ (voir les fonctions du second degré) ;
- L'équation s'écrit donc

$$(D + 2I)^2 u(x) + 9u(x) = 0.$$

On pose $u(x) = e^{-2x} v(x)$ et on a $(D + 2I)u(x) = e^{-2x} Dv(x)$, donc l'équation devient

$$e^{-2x}(D^2 v(x) + 9v(x)) = 0.$$

On trouve

$$v(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

donc

$$u(x) = e^{-2x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le cas homogène, $\Delta < 0$, le résultat

On considère une équation du type (on peut toujours s'y ramener) :

$$D^2u(x) + bDu(x) + cu(x) = 0.$$

L'équation auxiliaire s'écrit (avec $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4c$)

$$z^2 + bz + c = 0 \quad \text{ou} \quad [(z + \frac{b}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4}] = 0.$$

Proposition

Si $\Delta < 0$, alors les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$u(x) = e^{-\frac{b}{2}x}(C_1 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x))$$

On peut bien sûr résoudre les équations non homogènes...

Un dernier effort, le modèle logistique

- On se rappelle l'équation : $P'(t) = kP(t)(1 - \frac{P(t)}{L})$, et $P(0) = P_0$.
- L'équation fait apparaître $P'(t)$ et $P(t)$. On rassemble dans le même membre cette dépendance :

$$\frac{1}{P(t)(1 - \frac{P(t)}{L})} P'(t) = k$$

sur tout intervalle où $P(t) \in]0; L[$.
- Jusqu'à présent, on s'est ramené à des problèmes de primitivation, en changeant d'inconnue. Le membre de gauche de l'équation est la dérivée de

$$\int \frac{1}{P(t)(1 - \frac{P(t)}{L})} P'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{L}{P(t)(L - P(t))} P'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On primitive par substitution, en posant $u = P(t)$:

$$\int \frac{L}{P(t)(L - P(t))} P'(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{L}{u(L-u)}\,\mathrm{d}u}_{F(u)}\,\Big|_{u=P(t)},$$

où la primitive se calcule sur $]0; L[$.

On obtient l'équation équivalente $D(F(P(t)) = k$, qui donne la solution implicite

$$F(P(t)) \simeq kt.$$

On calcule F en décomposant la fraction et on obtient

$$F(u) \simeq \ln(\frac{u}{L-u}).$$

On trouve donc

$$\ln(\frac{P(t)}{L-P(t)}) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$P(t) = \frac{Le^{kt+C}}{1+e^{kt+C}}.$$

On fixe C via la condition initiale et on a finalement

$$P(t) = \frac{LP_0e^{kt}}{(L-P_0)+P_0e^{kt}}.$$

Notations et généralisations

La méthode ci-dessus se généralise aux équations de la forme

$$g(u(t))u'(t) = f(t),$$

où l'inconnue est la fonction $u : t \mapsto u(t)$, ou encore à

$$u'(t) = h(u(t))f(t),$$

qui se ramènent à la précédente (si h est convenable). Ce sont des équations à variables séparées.

Primitiver le membre de gauche par substitution mène à la primitive $\int g(u)\,\mathrm{d}u$. On se rappelle la méthode comme suit :

$$g(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t) \Leftrightarrow \int g(u)\,\mathrm{d}u = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette notation est cependant bancale. On arrive à une solution implicite

$$G(u(t)) = F(t),$$

que l'on peut résoudre dans les bons cas.