Mathématique

Logique et ensembles

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Déroulement du cours

- Contenus principaux du cours :
  1. Eléments de logique et de théorie des ensembles
  2. Nombres, valeurs absolues, puissances, notation scientifique, équations premier et second degré, transformations de formules
  3. Inéquations, systèmes d'équations, proportionnalités
  4. Points, droites, vecteurs, composantes et coordonnées, équations de droites dans le plan, distance et perpendicularité
  5. Nombres trigonométriques, angles particuliers, associés, triangles rectangles, triangles quelconques
  6. Produit scalaire, projections, produit vectoriel
  7. Fonctions de référence (y compris logarithmes, exponentielles), constructions importantes
  8. Limites, continuité, dérivées et leurs applications, primitives et calcul intégral
  9. Rudiments sur les fonctions de plusieurs variables
  10. Quelques équations différentielles
  11. Divers
- Déroulement des cours : théorie+exercices résolus et séances d'exercices; Modalités pratiques : 5 groupes de tp, attention à l'horaire.
- Examen : QCM + quelques questions ouvertes
- Ressources : 3 types de fichiers + exercices (mail ou page web);
- Mail : P.Mathonet@uliege.be;

Assertions logiques

Définition

Une *assertion* ou *proposition logique* est une phrase que l'on énonce sous forme affirmative ou négative.

Les assertions sont compréhensibles sans ambiguïté et on peut décider si elles sont vraies (V ou 1) ou fausses (F ou 0).

Assertions logiques

Définition

Une *assertion* ou *proposition logique* est une phrase que l'on énonce sous forme affirmative ou négative.

Les assertions sont compréhensibles sans ambiguïté et on peut décider si elles sont vraies (V ou 1) ou fausses (F ou 0).

Exemples :

1. "Aujourd'hui, je porte un pull rouge";
2. "3 est un nombre premier";
3. "3 n'est pas divisible par 2";
4. "Il pleut à 8h du matin";
5. "J'emporte un parapluie";
6. "Si Berlin est en Suisse, alors je viens de Mars".

Assertions logiques

Définition

Une *assertion* ou *proposition logique* est une phrase que l'on énonce sous forme affirmative ou négative.

Les assertions sont compréhensibles sans ambiguïté et on peut décider si elles sont vraies (V ou 1) ou fausses (F ou 0).

Exemples :

1. "Aujourd'hui, je porte un pull rouge";
2. "3 est un nombre premier";
3. "3 n'est pas divisible par 2";
4. "Il pleut à 8h du matin";
5. "J'emporte un parapluie";
6. "Si Berlin est en Suisse, alors je viens de Mars".

Contre-exemples :

1. "Quelle heure est-il ?"
2. "Paris est-elle la capitale de la France ?"
3. "Cette phrase est fausse."
4. "Je corniflute gauche bien."

Connecteurs logiques

- But : former de nouvelles assertions à partir d'anciennes,
- Moyen : utiliser les *connecteurs logiques*.

Connecteurs logiques

- But : former de nouvelles assertions à partir d'anciennes,
- Moyen : utiliser les *connecteurs logiques*.

Nous utiliserons les connecteurs suivants.

1. négation (non);
2. conjonction (et);
3. disjonction (ou);
4. implication (si...alors);
5. bi-implication (si, et seulement si).

Connecteurs logiques

- But : former de nouvelles assertions à partir d'anciennes,
- Moyen : utiliser les *connecteurs logiques*.

  Nous utiliserons les connecteurs suivants.

  1. négation (non);
  2. conjonction (et);
  3. disjonction (ou);
  4. implication (si...alors);
  5. bi-implication (si, et seulement si).

- Les règles de construction qui donnent la valeur de vérité (0 ou 1) des assertions composées sont données à l'aide de *tables de vérité*.

La négation

Définition (Négation)

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion, on la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est faux et elle est fausse si P est vrai. La table de vérité du connecteur $\neg$ ("non") est

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

La négation

Définition (Négation)

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion, on la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est faux et elle est fausse si P est vrai. La table de vérité du connecteur $\neg$ (“non”) est

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Exemples :

1. P : “Aujourd’hui, je porte un pull rouge”; $\neg P$: “Aujourd’hui, je ne porte pas un pull rouge”;

La négation

Définition (Négation)

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion, on la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est faux et elle est fausse si P est vrai. La table de vérité du connecteur $\neg$ (“non”) est

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Exemples :

1. P : “Aujourd’hui, je porte un pull rouge”; $\neg P$: “Aujourd’hui, je ne porte pas un pull rouge”;
2. P : “3 est un nombre premier”; $\neg P$: “3 n’est pas un nombre premier”;

La négation

Définition (Négation)

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion, on la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est faux et elle est fausse si P est vrai. La table de vérité du connecteur $\neg$ (“non”) est

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Exemples :

1. P : “Aujourd'hui, je porte un pull rouge”; $\neg P$: “Aujourd'hui, je ne porte pas un pull rouge”;
2. P : “3 est un nombre premier”; $\neg P$: “3 n'est pas un nombre premier”;
3. Q : “3 n'est pas divisible par 2”; $\neg Q$: “3 est divisible par 2”;

La négation

Définition (Négation)

Si P est une assertion, alors la négation de P est une assertion, on la note $\neg P$. Cette assertion est vraie si P est faux et elle est fausse si P est vrai. La table de vérité du connecteur $\neg$ ("non") est

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Exemples :

1. P : "Aujourd'hui, je porte un pull rouge"; $\neg P$: "Aujourd'hui, je ne porte pas un pull rouge";
2. P : "3 est un nombre premier"; $\neg P$: "3 n'est pas un nombre premier";
3. Q : "3 n'est pas divisible par 2"; $\neg Q$: "3 est divisible par 2";
4. R : "J'emporte un parapluie"; $\neg R$: "Je n'emporte pas de parapluie".

Equivalence logique de propositions

Une observation : quel que soit P, les propositions P et $\neg(\neg P)$ veulent dire la même chose, mais ne sont pas écrites de la même façon.

Equivalence logique de propositions

Une observation : quel que soit P, les propositions P et $\neg(\neg P)$ veulent dire la même chose, mais ne sont pas écrites de la même façon.

Définition

Deux propositions logiques P et Q (composées à partir de propositions élémentaires) sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité (i.e. les mêmes valeurs de vérité, dans tous les cas). On note alors $P \equiv Q$.

Equivalence logique de propositions

Une observation : quel que soit P, les propositions P et $\neg(\neg P)$ veulent dire la même chose, mais ne sont pas écrites de la même façon.

Définition

Deux propositions logiques P et Q (composées à partir de propositions élémentaires) sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité (i.e. les mêmes valeurs de vérité, dans tous les cas). On note alors $P \equiv Q$.

Avec les tables de vérité

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	1	0
1	0	1

On a donc $P \equiv \neg(\neg P)$, quel que soit P.

Equivalence logique de propositions

Une observation : quel que soit P, les propositions P et $\neg(\neg P)$ veulent dire la même chose, mais ne sont pas écrites de la même façon.

Définition

Deux propositions logiques P et Q (composées à partir de propositions élémentaires) sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité (i.e. les mêmes valeurs de vérité, dans tous les cas). On note alors $P \equiv Q$.

Avec les tables de vérité

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	1	0
1	0	1

On a donc $P \equiv \neg(\neg P)$, quel que soit P.

Exemple : dire "il n'est pas vrai que je n'emporte pas de parapluie" ou dire "j'emporte un parapluie", c'est dire la même chose.

Equivalence logique de propositions

Une observation : quel que soit P, les propositions P et $\neg(\neg P)$ veulent dire la même chose, mais ne sont pas écrites de la même façon.

Définition

Deux propositions logiques P et Q (composées à partir de propositions élémentaires) sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité (i.e. les mêmes valeurs de vérité, dans tous les cas). On note alors $P \equiv Q$.

Avec les tables de vérité

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	1	0
1	0	1

On a donc $P \equiv \neg(\neg P)$, quel que soit P.

Exemple : dire “il n'est pas vrai que je n'emporte pas de parapluie” ou dire “j'emporte un parapluie”, c'est dire la même chose.

On peut toujours remplacer (dans une expression logique) une assertion par une assertion logiquement équivalente.

La conjonction (et)

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la conjonction de P et Q est une assertion, notée $P \wedge Q$ ou "P et Q". Elle est vraie quand P est vrai et Q est vrai (simultanément) et fausse sinon. La table de vérité du connecteur $\wedge$ ("et") est

P	Q	P et Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La conjonction (et)

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la conjonction de P et Q est une assertion, notée $P \wedge Q$ ou "P et Q". Elle est vraie quand P est vrai et Q est vrai (simultanément) et fausse sinon. La table de vérité du connecteur $\wedge$ ("et") est

P	Q	P et Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples :

1. "Il pleut et je porte un pull rouge";
2. "J'emporte un parapluie et 3 est un nombre premier".

La conjonction n'est vraie que si les deux assertions qui la composent sont vraies.

La disjonction (ou)

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la disjonction de P et Q est une assertion, notée $P \vee Q$ ou "P ou Q". Elle est vraie quand au moins l'une des deux assertions P et Q est vraie et fausse sinon. La table de vérité du connecteur $\vee$ ("ou") est donc

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On remarque que $P \vee Q$ est vraie dans tous les cas, sauf si P et Q sont faux simultanément.

La disjonction (ou)

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la disjonction de P et Q est une assertion, notée $P \vee Q$ ou “P ou Q”. Elle est vraie quand au moins l'une des deux assertions P et Q est vraie et fausse sinon. La table de vérité du connecteur $\vee$ (“ou”) est donc

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On remarque que $P \vee Q$ est vraie dans tous les cas, sauf si P et Q sont faux simultanément. Attention : le “ou” n'est pas exclusif.

La disjonction (ou)

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors la disjonction de P et Q est une assertion, notée $P \vee Q$ ou "P ou Q". Elle est vraie quand au moins l'une des deux assertions P et Q est vraie et fausse sinon. La table de vérité du connecteur $\vee$ ("ou") est donc

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On remarque que $P \vee Q$ est vraie dans tous les cas, sauf si P et Q sont faux simultanément. Attention : le "ou" n'est pas exclusif.

Exemples :

1. "Il pleut ou je porte un pull rouge";
2. "J'emporte un parapluie ou 3 est un nombre premier".

Négations, “et” et “ou”

Proposition

On a les équivalences logiques suivantes

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;

Négations, "et" et "ou"

Proposition

On a les équivalences logiques suivantes

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;

Exemples :

- La négation de "Il pleut ou je porte un pull rouge" est "il ne pleut pas et je ne porte pas de pull rouge".
- La négation de "Il pleut et on est mardi" est "il ne pleut pas ou on n'est pas mardi".

Négations, “et” et “ou”

Proposition

On a les équivalences logiques suivantes

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;

Exemples :

- La négation de “Il pleut ou je porte un pull rouge” est “il ne pleut pas et je ne porte pas de pull rouge”.
- La négation de “Il pleut et on est mardi” est “il ne pleut pas ou on n’est pas mardi”.

Preuve de la première équivalence :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Implications

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors "P implique Q" est une assertion. On la note $P \Rightarrow Q$. Elle est vraie si Q est vrai chaque fois que P est vrai. La table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implications

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors "P implique Q" est une assertion. On la note $P \Rightarrow Q$. Elle est vraie si Q est vrai chaque fois que P est vrai. La table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie dans tous les cas sauf si P est vrai et Q est faux. *Donc, quand P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai.*

Implications

Définition

Si P et Q sont deux assertions, alors "P implique Q" est une assertion. On la note $P \Rightarrow Q$. Elle est vraie si Q est vrai chaque fois que P est vrai. La table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie dans tous les cas sauf si P est vrai et Q est faux. *Donc, quand P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai.*

1. "Si il pleut à 8h, alors j'emporte un parapluie.
2. "Si on est jeudi, je porte un pull rouge." ou "Tous les vendredis, je porte un pull rouge."
3. "Si le prof mesure 3m, alors il est milliardaire."

Bi-implications ou équivalences

Définition

Si P et Q sont deux assertions alors "P bi-implique Q", ou "P est équivalent à Q" est une assertion. On la note $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie quand P implique Q et Q implique P sont vrais. La table de vérité est

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bi-implications ou équivalences

Définition

Si P et Q sont deux assertions alors "P bi-implique Q", ou "P est équivalent à Q" est une assertion. On la note $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie quand P implique Q et Q implique P sont vrais. La table de vérité est

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples :

1. "J'ai un parapluie si et seulement si il pleut";
2. "Je porte un pull rouge si et seulement si on est vendredi".

Bi-implications ou équivalences

Définition

Si P et Q sont deux assertions alors "P bi-implique Q", ou "P est équivalent à Q" est une assertion. On la note $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie quand P implique Q et Q implique P sont vrais. La table de vérité est

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples :

1. "J'ai un parapluie si et seulement si il pleut";
2. "Je porte un pull rouge si et seulement si on est vendredi".

La deuxième est vraie soit si je n'ai pas de pull rouge et on n'est pas vendredi, soit si j'ai un pull rouge et on est vendredi.

Quantificateurs

- Le signe $\forall$ se lit "pour tout";
- Le signe $\exists$ se lit "il existe".

Exemple :

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

veut dire "pour tout x tel que P (soit vrai), il existe un y tel que Q (soit vrai)".

Quantificateurs

- Le signe $\forall$ se lit “pour tout”;
- Le signe $\exists$ se lit “il existe”.

Exemple :

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

veut dire “pour tout x tel que P (soit vrai), il existe un y tel que Q (soit vrai)”.
Attention, la négation du quantificateur $\forall$ s’écrit avec le quantificateur $\exists$ et vice-versa.

Quantificateurs

- Le signe $\forall$ se lit "pour tout";
- Le signe $\exists$ se lit "il existe".

Exemple :

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

veut dire "pour tout x tel que P (soit vrai), il existe un y tel que Q (soit vrai)".
Attention, la négation du quantificateur $\forall$ s'écrit avec le quantificateur $\exists$ et vice-versa.
Exemple :

- Nier "Tous les moutons d'Irlande sont noirs";
- Nier "Il existe un cheval de course bon marché"

L'ordre des quantificateurs a de l'importance. Par exemple, comparez

Quantificateurs

- Le signe $\forall$ se lit “pour tout”;
- Le signe $\exists$ se lit “il existe”.

Exemple :

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

veut dire “pour tout x tel que P (soit vrai), il existe un y tel que Q (soit vrai)”.
Attention, la négation du quantificateur $\forall$ s'écrit avec le quantificateur $\exists$ et vice-versa.
Exemple :

- Nier “Tous les moutons d'Irlande sont noirs”;
- Nier “Il existe un cheval de course bon marché”

L'ordre des quantificateurs a de l'importance. Par exemple, comparez
“Pour tout garçon dans la salle, il existe une fille dans la salle telle que...”
“Il existe une fille dans la salle telle que pour tout garçon dans la salle...”

Les parenthèses

On peut composer les connecteurs pour créer des assertions compliquées.
Il faut alors mettre des parenthèses :
Par exemple $P \wedge Q \vee R$ n'a pas de sens, car $(P \wedge Q) \vee R$ et $P \wedge (Q \vee R)$ ne sont pas équivalentes.

Les parenthèses

On peut composer les connecteurs pour créer des assertions compliquées. Il faut alors mettre des parenthèses :
Par exemple $P \wedge Q \vee R$ n'a pas de sens, car $(P \wedge Q) \vee R$ et $P \wedge (Q \vee R)$ ne sont pas équivalentes.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Tautologies

Soient P et Q deux assertions. On peut calculer la table de vérité de

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q.$$

Tautologies

Soient P et Q deux assertions. On peut calculer la table de vérité de

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q.$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q)$ et P	$((P \Rightarrow Q)$ et $P) \Rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

L'assertion

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q.$$

est donc toujours vraie, dans tous les cas de figure pour P et Q. C'est une tautologie.

Dans le langage commun, cette tautologie donne lieu au raisonnement suivant : si chaque vendredi, j'ai un pull rouge, et si on est vendredi, on peut logiquement conclure que j'ai un pull rouge.

Deux exercices

Donner la négation de la proposition logique "Tous les professeurs de mathématiques sont petits ou sont méchants aux examens." On suppose que grand est la négation de petit, et être gentil aux examens est la négation d'être méchant aux examens.

1. Tous les professeurs de mathématiques sont grands et sont gentils aux examens
2. Tous les professeurs de mathématiques sont grands ou sont gentils aux examens
3. Il existe un professeur de mathématique qui est grand et qui est gentil aux examens
4. Il existe un professeur de mathématique qui est grand ou qui est gentil aux examens

Parmi les propositions suivantes, déterminez celle qui est équivalente à l'assertion "Si on est en Belgique, alors il pleut ou il fait trop chaud"

1. Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas et il ne fait pas trop chaud
2. Si on n'est pas en Belgique, alors il ne pleut pas ou il ne fait pas trop chaud
3. S'il ne pleut pas et s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique
4. S'il ne pleut pas ou s'il ne fait pas trop chaud, alors on n'est pas en Belgique

Théorie (naïve) des ensembles

Définition

Un *ensemble* est une collection d'objets possédant une ou plusieurs propriétés communes. Ces objets sont les *éléments* de l'ensemble.

Théorie (naïve) des ensembles

Définition

Un *ensemble* est une collection d'objets possédant une ou plusieurs propriétés communes. Ces objets sont les *éléments* de l'ensemble.

Les *éléments* peuvent par exemple être donnés

1. de manière explicite, par des symboles tels que $1, 2, 3, a, b \ldots$;
2. par un symbole générique affecté d'un ou plusieurs indices, $x_i \,(i \in I)$ où I est un autre ensemble.

Théorie (naïve) des ensembles

Définition

Un *ensemble* est une collection d'objets possédant une ou plusieurs propriétés communes. Ces objets sont les *éléments* de l'ensemble.

Les *éléments* peuvent par exemple être donnés

1. de manière explicite, par des symboles tels que $1, 2, 3, a, b \dots$;
2. par un symbole générique affecté d'un ou plusieurs indices, x_i $(i \in I)$ où I est un autre ensemble.

Un ensemble peut être donné

1. de manière explicite, en donnant tous ses éléments, (définition en *extension*) comme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ou $B = \{a, b, c, d, e\}$;
2. de manière explicite, mais sans donner tous ses éléments, comme $C = \{1, 2, \dots, 100\}$, ou encore $D = \{a, b, c, \dots, z\}$.
3. en décrivant la (ou les) propriété(s) caractérisant ses éléments, (définition en *compréhension*) comme dans

$$\{n : n \text{ est entier, pair et compris entre 1 et 99}\}.$$

Propriétés des ensembles

1. ***Ensemble vide*** : Il existe un ensemble qui ne contient pas d'éléments, l'ensemble vide, noté $\varnothing$.
2. ***Appartenance*** : on écrit $x \in A$ (x appartient à A) pour signifier que x est un élément de l'ensemble A.
3. ***Inclusion*** : on écrit $B \subset A$ (B est inclus dans A, ou B est un sous-ensemble de A) quand tout élément de B est aussi un élément de A.
   Exemple : $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{n : n \text{ est pair}\}$.
4. ***Egalité*** : on écrit $A = B$ (A et B sont égaux) quand les ensembles A et B ont les mêmes éléments. Cela se traduit aussi par $A \subset B$ et $B \subset A$.

Union, intersection, différence

Soient A et B deux ensembles.

1. ***Union*** : l'ensemble $A \cup B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On a donc, d'un point de vue logique, quel que soit l'objet x,
$$(x \in A \cup B) \equiv ((x \in A)\,\text{ou}\,(x \in B)).$$
2. ***Intersection*** : l'ensemble $A \cap B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A et B. On a donc, d'un point de vue logique, quel que soit l'objet x,
$$(x \in A \cap B) \equiv ((x \in A)\,\text{et}\,(x \in B)).$$
3. ***Différence*** : l'ensemble $A \setminus B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A et pas à B. On a donc, d'un point de vue logique, quel que soit l'objet x,
$$(x \in A \setminus B) \equiv ((x \in A)\,\text{et}\,\neg(x \in B)).$$

Un gros théorème

Proposition

Si X est un ensemble et si A, B, C sont trois sous-ensembles de X, alors

1. $X \cup X = X$, $X \cap X = X$;
2. $X \setminus X = \varnothing$, $X \setminus \varnothing = X$, $\varnothing \cup X = X$, $\varnothing \cap X = \varnothing$;
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5. $A \cup (X \setminus A) = X$, $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$;
6. *si* $A \subset B$, *alors* $A \cap C \subset B \cap C$;
7. *si* $A \subset B$, *alors* $A \cup C \subset B \cup C$;
8. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
9. *si* $C \subset A$ *et* $C \subset B$, *alors* $C \subset A \cap B$;
10. *si* $A \subset C$ *et* $B \subset C$, *alors* $A \cup B \subset C$;
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
12. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
13. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
14. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
15. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$;
16. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Une preuve de l'égalité 11.

Etant donné un objet x, on a les 3 assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, qui peuvent toutes prendre les valeurs Vrai (1) ou faux (0). On calcule alors la table de vérité suivante.

Une preuve de l'égalité 11.

Etant donné un objet x, on a les 3 assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, qui peuvent toutes prendre les valeurs Vrai (1) ou faux (0). On calcule alors la table de vérité suivante.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$(B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Une preuve de l'égalité 11.

Etant donné un objet x, on a les 3 assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$, qui peuvent toutes prendre les valeurs Vrai (1) ou faux (0). On calcule alors la table de vérité suivante.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$(B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

On constate que les assertions $x \in A \cap (B \cup C)$ et $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ sont logiquement équivalentes.

Diagrammes de Venn[1]

- On représente l'ensemble par une courbe fermée, cercle ou une ellipse (appelées parfois patates).
- Si on veut marquer qu'un objet est un élément de l'ensemble, on le place dans la région correspondante.
- On représente plusieurs ensembles (généralement 2, 3 ou 4) par plusieurs courbes fermées.

Soit A : l'ensemble des nombres entiers pairs et strictement positifs.

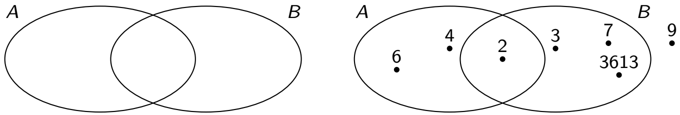
A gauche, on marque que 2 et 4 sont des éléments.

[1] John Venn (1834-1923) les formalisa en 1880.

Deux ensembles

Deux ensembles ? Deux patates.

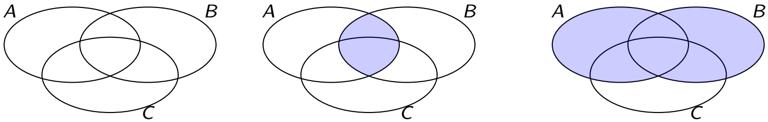
- Soit A l'ensemble des nombres pairs strictement positifs;
- Soit B l'ensemble des nombres premiers.



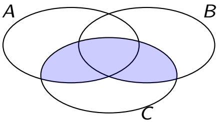
- A gauche, la situation générale, à droite, on a marqué quelques points.

Applications des diagrammes de Venn

- On colorie les zones qui nous intéressent.
- A gauche, on a représenté la situation générale, au milieu, on a colorié la zone représentant $A \cap B$, à droite la zone représentant $A \cup B$.



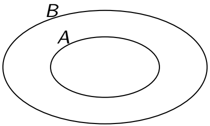
On peut colorier la zone représentant $(A \cup B) \cap C$:



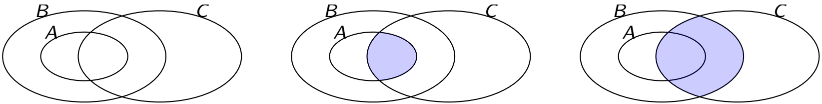
On peut constater $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Un exemple

Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre que si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$, quels que soient les ensembles A, B et C.
La situation où on a $A \subset B$ se représente à l'aide de diagrammes de Venn de la manière suivante.



On représente alors l'ensemble C de la manière la plus générale comme dans la figure de gauche. Au milieu, on peut colorier $A \cap C$ et à droite $B \cap C$.



On constate alors l'inclusion sur le diagramme de Venn.