Mathématique

Nombres et algèbre

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Nombres

Les ensembles de nombres classiques :

- Les nombres *naturels* : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- Les nombres *entiers* : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$, et $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- Les nombres *rationnels* : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0\}$, modulo l'équivalence des fractions, et $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

Quelques remarques :

- Tous ces nombres admettent un développement décimal fini ou infini périodique.
- On commence à compter avec les nombres naturels
- Dans $\mathbb{Z}$, tout nombre a admet un opposé, noté $-a$, tel que $a + (-a) = 0$. On pense en termes de gains et pertes.
- Dans $\mathbb{Q}$, tout nombre non nul a admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$, tel que $a.\frac{1}{a} = 1$. On pense en termes de fractions.

Si on ajoute les nombres avec des développement décimaux quelconques, on a les nombres réels ($\mathbb{R}$). On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Propriétés des nombres réels

Proposition

Les opérations dans les nombres réels satisfont les propriétés suivantes :

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *pour tous* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(l'addition est associative);*
2. $a + 0 = 0 + a = a$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *(l'addition admet un neutre 0);*
3. $a + b = b + a$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *(l'addition est commutative);*
4. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *il existe un nombre noté* $-a$ *et appelé l'opposé de* a, *tel que* $a + (-a) = (-a) + a = 0$, ;
5. $(a.b).c = a.(b.c)$ *pour tous* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(la multiplication est associative);*
6. $a.1 = 1.a = a$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *(la multiplication admet un neutre 1);*
7. $a.b = b.a$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *(la multiplication est commutative).*
8. *Pour tout nombre* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$, *il existe un nombre noté* $\frac{1}{a}$ *ou* a^{-1} *et appelé l'inverse de* a, *tel que* $a.(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}).a = 1$, ;
9. *Pour tous* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a.(b + c) = a.b + a.c$ *et* $(b + c).a = b.a + c.a$.

Opérations et priorités

- Opérations sur les fractions (quotients), les dénominateurs sont supposés non nuls, ils peuvent être entiers ou non
  1. Multiplication :
  $$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}.$$
  2. Division :
  $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}.$$
  3. Addition :
  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}.$$
  4. Soustraction :
  $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\,d - b\,c}{b\,d}.$$
- Tout nombre entier est une fraction : $3 = \frac{3}{1}$.
- Attention aux parenthèses implicites
- Attention à la place et à la taille des barres de fractions
- Priorité :

P E (M D) (A S)

Produits remarquables

Proposition

Les identités suivantes sont valables pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$;
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$;
4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

- **Remarque :** Les identités se lisent dans les deux sens.
- **Exercice :** Démontrer ces formules à l'aide des propriétés des nombres réels.

Quelques règles de calcul

On doit retenir les règles suivantes, qui sont très utiles pour travailler avec des expressions littérales. C'est ce que nous venons de constater.

Proposition

1. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a :* $-(a+b) = (-a) + (-b)$;
2. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a :* $-(a-b) = ((-a) + b) = b - a$;
3. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a :* $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$;
4. *Pour tous* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}_0$, *on a :* $(-a) : b = a : (-b) = -(a : b)$, *pour autant que l'un de ces quotients existe (auquel cas ils existent tous), et en particulier,* $(-a) : (-b) = a : b$.

Donc "moins par moins donne plus" pour les multiplications et les divisions aussi.

Deux Exercices

1. Soient a, b, c, d des nombres strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, supposées définies, laquelle est égale à l'opposé de l'inverse de $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$?

   1. $\frac{bd}{bc-ad}$
   2. $\frac{bd}{ad-bc}$
   3. $\frac{bc-ad}{bd}$
   4. $\frac{ad-bc}{bd}$

   (1) On doit calculer l'inverse, donc on met au même dénominateur
   (2) On calcule l'opposé
   (3) On regarde quelle solution correspond.

2. Si $\frac{9-a^2}{3+a} = 0,01$, que vaut a ?

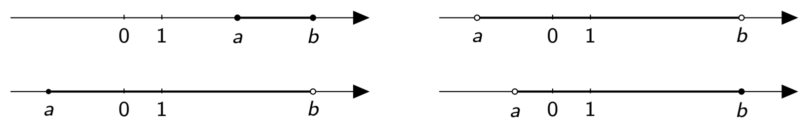
   1. $-3,01$
   2. $-2,99$
   3. $2,99$
   4. $3,01$

   (1) On peut développer l'équation, on a une équation du second degré.
   (2) Mais il est plus utile de FACTORISER
   (3) On se ramène alors à une équation plus simple.

Valeurs absolues et intervalles de nombres

Les intervalles bornés :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé);
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert);
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ (intervalle semi-ouvert);
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ (intervalle semi-ouvert).



Les intervalles non bornés :

1. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ et $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ (ouverts)
2. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$ et $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ (fermés)

Définition

Si x est un réel, on appelle module de x, ou valeur absolue de x le nombre $|x| = \max\{-x, x\}$. (C'est à dire le nombre positif dans $\{x, -x\}$.)

On a donc $|-\sqrt{2}| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|\pi - 4| = 4 - \pi$ etc...

Puissances

Définition

Pour tout nombre a et tout naturel $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}, \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

On pose $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Dans l'expression a^n, a est la *base* et n est *l'exposant*.

Rem. : Pour $a = 0$ et $n \neq 0$, on a $a^n = 0$.

Proposition

Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
4. $(ab)^m = a^m b^m$.

Notation scientifique

L'idée :

$$10^2 = 100, 10^3 = 1000, ..., 10^9 = 1000\,000\,000, ...$$
$$\tfrac{1}{10} = 10^{-1}, \tfrac{1}{100} = 10^{-2}, \tfrac{1}{1000} = 10^{-3}, \tfrac{1}{1000\,000} = 10^{-6}, \ldots$$

ou encore

$0,1 = 10^{-1}, 0,01 = 10^{-2}, 0,001 = 10^{-3}, \quad 0,0001 = 10^{-4}, 0,000001 = 10^{-6},$

Définition

Pour tout nombre x non nul, il existe un nombre a tel que $1 \leqslant a < 10$ et un entier n tel que

$$x = a \times 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la *mantisse*, et n l'*exposant*.

Exemples : $3400 = 3,4 \times 1000 = 3,4 \times 10^3$, $-27000 = -2,7 \times 10^4$ ou $-340 = -3,4 \times 10^2$

Méthode de conversion : On déplace la virgule. (Tout nombre peut être écrit avec une virgule)

Utilisation pour les unités : $ms^{-2} = m/s^2$. Cela permet une conversion simple.

Racines carrées et cubiques

Définition

La racine carrée (positive) du nombre réel a est l'unique nombre <u>positif</u> x satisfaisant $x^2 = a$. Elle est notée $\sqrt{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

Attention : que vaut $\sqrt{9}$? Que vaut $\sqrt{x^2}$?

Proposition

Pour tous $a, b \geqslant 0$, on a

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
2. *si* $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Et pourquoi pas $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Définition

La racine cubique du nombre réel a est l'unique nombre réel x satisfaisant $x^3 = a$. Elle est notée $\sqrt[3]{a}$. Elle existe toujours.

Que vaut $\sqrt[3]{-27}$?

Racines p-èmes

Définition (Racines p-èmes, p pair)

Si p est pair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre <u>positif</u> x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

Définition (Racines p-èmes, p impair)

Si p est impair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle existe toujours.

Proposition

1. *Si p est naturel pair,*
   - *On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \geqslant 0$;*
   - *On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \geqslant 0$, $b > 0$;*
2. *Si p est naturel impair,*
   - *On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$;*
   - *On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$;*

Proposition

1. *Si p ou q est pair, on a*

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \textit{pour tout } a \geqslant 0.$$

2. *Si p et q sont impairs, on a*

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \textit{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Exposants fractionnaires

On généralise $(a^m)^n = a^{mn}$ au fractions. On a donc $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$.

Définition

Pour tout $a \geqslant 0$, et tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

et pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}.$$

Définition

Pour tout $a > 0$, et tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{(\sqrt[q]{a})^p}.$$

Quelques exercices

Ex. 37 Que vaut $-(81)^{-\frac{3}{4}}$?

1. -27
2. $-\frac{1}{27}$
3. $\frac{1}{27}$
4. 27

Définition des exposants négatifs : $-\frac{1}{81^{\frac{3}{4}}}$

Définition de l'exposant fractionnaire : $81^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{81})^3$ ou $\sqrt[4]{81^3}$

On choisit la meilleure formule, et on trouve donc $-\frac{1}{27}$.

Ex. 7 d Que vaut $\sqrt[4]{256}$?

On cherche un nombre $x \geqslant 0$ tel que $x^4 = 256$. On trouve $x = 4$.

Ex. 7 h Que vaut $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}$?

Définition des exposants négatifs, puis fractionnaires. On trouve 2.

Ex. 7 o Que vaut $\sqrt[3]{144}\sqrt[3]{12}$?

C'est un produit de racines, et $144 = 12^2$. C'est $\sqrt[3]{12^3} = 12$.

Ex. 7 t Que vaut $(\frac{27}{125})^{-\frac{2}{3}}$

Définition des exposants négatifs, puis fractionnaires. On trouve $\frac{25}{9}$.

Equations : théorie générale

- Une *égalité* est une assertion :

$$M_1 = M_2.$$

- Elle est soit vraie soit fausse.
- M_1 et M_2 sont les membres de l'égalité, fomés à partir de nombres et opérations.
- $3 \times 8 + 5 = 2 \times 8 + 13$ est vraie, $3 \times 7 + 5 = 2 \times 7 + 13$ est fausse.
- Une *équation* est une égalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent de nombres inconnus (notés, x, y, x_1, x_2, ...)
- Une *solution* est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'égalité.
- **Exemple :** 8 est une solution de $3\xi + 5 = 2\xi + 13$, mais pas 7.
- Résoudre l'équation consiste à déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions.

Equivalences

- Pour résoudre une équation, on la transforme sans changer son ensemble de solutions. C'est le principe d'équivalence.

Définition

Deux équations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. Si les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes, on note $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$. Si toutes les solutions de (E_1) sont solutions de (E_2), on notera alors $(E_1) \Rightarrow (E_2)$ et on dira que (E_1) implique (E_2).

Proposition

En additionnant un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente. En multipliant les deux membres d'une équation par un nombre non nul, on obtient une équation équivalente.

Remarque : si on multipliait par 0, on introduirait des solutions supplémentaires. Le nombre que l'on ajoute ou par lequel on multiplie peut dépendre de l'inconnue.

Equations du premier degré à une inconnue réelle

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, traitons les équations

$$ax + b = 0$$

- Si $a \neq 0$, on a $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, donc $S = \{-\frac{b}{a}\}$.
- Si $a = 0$, l'équation devient $0x = b$, ou $0 = b$.
  1. Si $b = 0$, on a $S = \mathbb{R}$;
  2. Si $b \neq 0$, on a $S = \varnothing$.

Méthode générale :

1. Simplifier au maximum les deux membres de l'équation;
2. Regrouper les termes contenant l'inconnue dans un seul membre;
3. Isoler l'inconnue ou appliquer la formule;
4. *Vérifier la solution dans l'équation de départ*.

Transformation de formules

- En physique, des "grandeurs mesurables" sont souvent liées par une formule toujours vraie. Par exemple

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

- En multipliant par $V \neq 0$, on a

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \rho V = \frac{m}{V} V \Leftrightarrow \boxed{\rho V = m}.$$

- En divisant par $\rho \neq 0$ les deux membres :

$$\rho V = m \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\rho V = \frac{1}{\rho} m \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{m}{\rho}}.$$

Exemple : déterminer R_1 en fonction de R et R_2 à partir de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Equations du second degré : exemples

- Résolvons l'équation :

$$x^2 = 9. \qquad (1)$$

On a

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0.$$

On note donc $S = \{-3, 3\}$.

- Résolvons (pour $x \in \mathbb{R}$) l'équation

$$3(x+2)^2 = 21.$$

On a

$$3(x+2)^2 = 21 \Leftrightarrow 3(x+2)^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow 3[(x+2)^2 - 7] = 0$$

On procède comme plus haut et on obtient l'équation équivalente :

$$3[(x+2) + \sqrt{7}][(x+2) - \sqrt{7}] = 0.$$

Donc $S = \{-2 + \sqrt{7}, -2 - \sqrt{7}\}$.

Remarque : on a en fait résolu

$$3x^2 + 12x - 9 = 0.$$

Résolution générale

On veut résoudre $ax^2+bx+c=0$, pour $a\neq 0$. On a

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

où le discriminant[1] Δ vaut b^2-4ac. Si $\Delta\geqslant 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}=(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2$ et

$$ax^2+bx+c=a[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}][x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}].$$

Proposition

1. *si $\Delta>0$: l'équation admet deux solutions distinctes : on a*
$$S=\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}.$$
2. *si $\Delta=0$: l'équation admet une seule solution : $S=\{\frac{-b}{2a}\}$. On dit que la solution $\frac{-b}{2a}$ est double.*
3. *Si $\Delta<0$: l'équation n'admet pas de solution. On note $S=\varnothing$;*

[1]Cette expression est aussi appelée réalisant.

Factorisation, somme et produit

Proposition

Si $a\neq 0$ et $\Delta\geqslant 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet les solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), et le trinôme correspondant se factorise :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

De plus, la somme des solutions vaut $\frac{-b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$.

Remarque : C'est une façon de vérifier rapidement les solutions.

Proposition (Réciproque)

Si n_1 et n_2 sont deux nombres dont la somme est s et le produit p, alors ces nombres sont solutions de l'équation

$$x^2-sx+p=0.$$

Preuve : Il suffit d'exprimer les conditions.

Mise en équations

Un père a quatre fois l'âge de son fils. Il y a trois ans, le produit de leurs âges était 145 ans[2]. Quelle est la somme de leurs âges actuellement ?

1. **Choix et dénomination des inconnues** : soit f l'âge actuel du fils et p l'âge actuel du père.
2. **Mise en équations** :
   - Le père a quatre fois l'âge du fils, on a donc
   $$p=4f \tag{2}$$
   - Il y a trois ans, l'âge du fils était $f-3$ et l'âge du père $p-3$:
   $$(f-3)(p-3)=145.$$

   On utilise (2), et f est donc une solution de $\boxed{(f-3)(4f-3)=145.}$
3. **Résolution de l'équation** :
$$(f-3)(4f-3)=145\Leftrightarrow 4f^2-15f+9=145\Leftrightarrow 4f^2-15f-136=0.$$
On a $\Delta=225+16\times 136=2401>0$, et donc
$$f_1=\frac{15-\sqrt{2401}}{8}=-\frac{34}{8},\quad\text{et}\quad f_2=\frac{15+\sqrt{2401}}{8}=8.$$
On trouve $f=8$ car $f\geqslant 0$, et donc $p=32$, d'où $p+f=40$.
4. **Vérification.**

Exercices résolus

Une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) admet pour solutions $x=6$ et $x=-2$. Que vaut le nombre $\frac{b}{c}$?

1) -12 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 12

(1) On a une information sur le produit et la somme : $\frac{c}{a}=-12$ et $-\frac{b}{a}=4$, donc $\frac{b}{a}=-4$.

(2) Alors $\frac{b}{c}=\frac{b}{a}\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$.

(3) On peut aussi utiliser la factorisation du trinôme et obtenir $ax^2+bx+c=a(x-6)(x+2)$, et identifier.

Faire des exercices semblables pour voir si on a bien compris.

Exercices résolus

1. Résoudre $16x + 4 = 22x - 8$:
   (1) On ajoute $-16x$ aux deux membres
   (2) On ajoute 8 aux deux membres
   (3) On obtient l'éq. équivalente $12 = 6x$.
   (4) On divise les deux membres par 6, l'éq. est équivalente à $x = 2$.
   (5) Vérifier

Ex. 9 i Résoudre $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{2}$:
   (1) Condition d'existence $x \neq 1$
   (2) On multiplie des deux côtés par $x - 1$
   (3) Eq. équivalente $x + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$, on multiplie par 2
   (4) Eq. équivalente $2(x + 1) = 3(x - 1)$, attention aux parenthèses. On développe.
   (5) Eq. équivalente $2x + 2 = 3x - 3$, on ajoute $-2x$, on ajoute 3. On trouve $x = 5$.
   (6) Vérifier.

2. Résoudre $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = 2$:
   (1) On multiplie par 6 et on obtient $3(3x - 1) + 2(x - 2) = 12$
   (2) On développe et on obtient $11x - 7 = 12$
   (3) On fait comme plus haut et on a $x = \frac{19}{11}$.
   (4) On peut vérifier, même si c'est long.

Exercice résolu

Ex. 10 Dans une salle de la bibliothèque, un tiers des étudiants ont un livre de mathématiques, un quart ont un livre de biologie. Les autres, 10 étudiants, ne font rien. Combien y a-t-il d'élèves dans la salle ?
   (1) On note n le nombre d'étudiants. C'est un entier positif, multiple de 3 et 4.
   (2) Etudiants math : $\frac{n}{3}$, étudiants en bio : $\frac{n}{4}$, autres 10
   (3) Equation : $n = \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + 10$
   (4) On multiplie par 12 et on développe $12n = 4n + +3n + 120$.
   (5) On trouve $n = 24$. On vérifie.

Ex. 12 En 2013, un père a 43 ans et son fils 24. En quelle année l'âge du père a-t-il été ou sera-t-il le double de l'âge du fils ?
   (1) Soit n l'année en question.
   (2) Age du père à l'année n : $n - 1970$. Age du fils à cette année $n - 1989$.
   (3) Equation : $n - 1970 = 2(n - 1989)$.
   (4) Solution $n = 2.1989 - 1970 = 2008$. Vérification : Ils avaient 38 et 19 ans.

Exercices résolus

Ex. 13 a Résoudre $3x^2 - 8x + 3 = 0$;
   (1) On a $\Delta = (-8)^2 - 4.3.3 = 28 > 0$
   (2) Les solutions sont $\frac{8 \pm \sqrt{28}}{6}$
   (3) De plus $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Ex. 13 c Résoudre $2y^2 = 16y - 18$;
   (1) On simplifie par 2, et on a une éq. équivalente $y^2 - 8y + 9 = 0$
   (2) On trouve $\Delta = (-8)^2 - 4.3.3 = 28 > 0$
   (3) Les solutions sont $4 \pm \sqrt{7}$.

Ex. 13 f Résoudre $6x^2 + 3x - 12 = 0$.
   (1) On simplifie par 3, et on a une éq. équivalente $2x^2 + x - 4 = 0$
   (2) On trouve $\Delta = 1 - 4(2)(-4) = 33 > 0$
   (3) Les solutions sont $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Il est parfois difficile de vérifier. On peut refaire les calculs.

Exercices résolus

1. Sachant que les nombres réels strictement positifs R_1, R_2 et f sont liées par la relation $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ avec $n > 1$, exprimer R_2 en fonction des autres nombres.
   (1) On divise les deux membres par $(n - 1)$: $\frac{1}{f(n-1)} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
   (2) On retire $\frac{1}{R_1}$ des deux membres : $\frac{1}{f(n-1)} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$.
   (3) On met au même dénominateur $\frac{R_1 - f(n-1)}{f(n-1)R_1} = \frac{1}{R_2}$.
   (4) On inverse les deux fractions : $R_2 = \frac{f(n-1)R_1}{R_1 - f(n-1)}$.

Ex. 25 Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 5632x + 1133407 = 0$?

1. $\{209, -5423\}$
2. $\{209, -5422\}$
3. $\{209, 5422\}$
4. $\{209, 5423\}$

   (1) En théorie, on pourrait résoudre, mais pas mentalement, il faut trouver autre chose.
   (2) La somme des solutions proposées est facile à calculer. Elle doit valoir 5632.
   (3) On procède par élimination, c'est la réponse 4.

Exercices résolus

Ex. 14 Deux trains A et B partent en même temps d'une même gare, l'un vers le nord et l'autre vers l'est. Le train B se déplace à $5km/h$ de plus que le train A. Si, après 2 heures, ils sont à $50km$ de distance l'un de l'autre, trouve la vitesse de chaque train.

(1) Faire un schéma (sommaire, inutile de dessiner les trains...)

(2) Fixer les inconnues A va vers l'est à une vitesse v_A positive, et donnée en km/h, B va vers le nord à une vitesse v_B.

(3) On a une première équation $v_B = v_A + 5$.

(4) Que se passe-t-il après 2 heures (voir schéma) ? On a une deuxième équation

$$(2v_A)^2 + (2v_B)^2 = 50^2.$$

(5) On simplifie, on injecte la valeur de v_B dans cette équation :

$$v_A^2 + (v_A + 5)^2 = 625.$$

ou

$$v_A^2 + 5v_A - 300 = 0$$

et on trouve $v_A = 15(km/h)$ ou -20 (à rejeter) puis $v_B = 20km/h$.

(6) On vérfie (somme et produit)!

Inéquations : théorie générale

- Une *inégalité* est une assertion :

$$M_1 \leqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 \geqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 < M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 > M_2.$$

- Elle est soit vraie soit fausse.
- M_1 et M_2 sont les membres de l'inégalité, fomés à partir de nombres et opérations.
- $3 \times 8 + 5 \leqslant 2 \times 8 + 13$ est vraie, $3 \times 7 + 5 \geqslant 2 \times 7 + 13$ est fausse.
- Une *inéquation* est une inégalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent de nombres inconnus (notés, x, y,...)
- Une *solution* est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'inégalité.
- **Exemple :** 10 est une solution de $3\xi + 5 \geqslant 2\xi + 13$, mais pas 7.
- Résoudre l'inéquation consiste à déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions.

Equivalences

- Pour résoudre une inéquation, on peut procéder par équivalences. Ce n'est pas toujours suffisant.

Définition

Deux inéquations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. Si (I_1) et (I_2) sont équivalentes, on note $(I_1) \Leftrightarrow (I_2)$.

Proposition

En additionnant un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on obtient une équation équivalente.
En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement positif, on obtient une inéquation équivalente.
En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif, tout en changeant le sens du signe d'inégalité, on obtient une inéquation équivalente.

Remarques : Le nombre que l'on ajoute ou par lequel on multiplie peut dépendre de l'inconnue. On doit alors discuter différent cas.

Réduction du problème et exemple

- Les inégalités larges se ramènent aux inégalités strictes et inversement :

$$M_1 \leqslant M_2 \equiv (M_1 < M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 = M_2).$$

- L'inégalité $M_1 \leqslant M_2$ est equivalente à $M_2 \geqslant M_1$.
- Un exemple : résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$$

- Cette inéquation n'est pas équivalente à $3 \leqslant x$!
- Elle est équivalente à

$$\frac{3-x}{3x} \leqslant 0.$$

- On a donc $S =]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$.
- On peut toujours se ramener à une étude du signe :

$$M_1 \leqslant M_2 \Leftrightarrow M_1 - M_2 \leqslant 0.$$

Inéquations du premier degré

- Elles sont de la forme

$$ax+b>0 \text{ ou } ax+b<0 \text{ ou } ax+b\leqslant 0 \text{ ou } ax+b\geqslant 0.$$

  - **Cas 1 :** $a>0$. On a $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$. On a $S=]-\frac{b}{a},+\infty[$.
  - **Cas 2 :** $a<0$. On a $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$. On a $S=]-\infty,-\frac{b}{a}[$.
- Nous avons donc étudié le signe de $ax+b$ en fonction de x :

Cas 1 : a>0 :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

Cas 2 : a<0 :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

- **En résumé :** L'expression $ax+b$ est de signe constant dans chaque région déterminée par $-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

- **Remarque :** $-\frac{b}{a}$ est la solution de l'équation $ax+b=0$.

Exemples

1. Résoudre l'inéquation $2x-7\geqslant 0$.
   - Par équivalences, cette inéquation est équivalente à $x\geqslant \frac{7}{2}$.
   - On a donc $S=[\frac{7}{2},+\infty[$.
   - On peut utiliser le tableau de signes :

x	$-\infty$	$7/2$	$+\infty$
$2x-7$	$-$	0	$+$

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4}<0$.
   - On étudie le signe de chaque facteur.
   - On fait attention au dénominateur.
   - On utilise la règle "moins par moins donne plus".
   - Sous forme de tableau (en ordonnant les nombres utiles) :

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-4x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

   - On a donc $S=]-2,\frac{1}{2}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$.

Inéquations du second degré

On veut étudier le signe de ax^2+bx+c, ou $a\neq 0$. On a

$$ax^2+bx+c=\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) & \text{si } \Delta\geqslant 0\\ a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) & \text{si } \Delta<0,\end{cases}$$

où $x_1\leqslant x_2$ sont les racines (éventuellement égales) du trinôme.
Cas 1 : $\Delta\geqslant 0$: on a alors

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a		signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Cas 2 : $\Delta<0$: ax^2+bx+c a toujours le même signe que a.

En résumé : Le trinôme du second degré ax^2+bx+c a le même signe que a dans la région extérieure aux racines du trinôme.

Exercices résolus

Ex. 18 b Résoudre $t^2-49\geqslant 0$.
(1) On résout l'équation du second degré correspondante et on a les solutions $t=-7$ ou $t=7$.
(2) On applique la règle pour le signe et/ou on fait un tableau.
(3) Solution $]-\infty;-7]\cup[7;+\infty[$, on peut vérifier.

Ex 18 h Résoudre $\frac{3}{x+2}\geqslant 1-x$.
(1) Ne pas multiplier ! Mais se ramener à une étude du signe.
(2) On obtient l'inéquation équivalente $\frac{3}{x+2}-(1-x)\geqslant 0$.
(3) On met au même déno : $\frac{3-(1-x)(x+2)}{x+2}\geqslant 0$.
(4) On développe : $\frac{x^2+x+1}{x+2}\geqslant 0$.
(5) Le numérateur est toujours strictement positif, la cond. est $x+2>0$.

Ex 20 Au cours d'un voyage, une moitié de la distance est franchie à la vitesse moyenne de 80 km/h, l'autre moitié à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne du voyage?
(1) Noter d la distance, t_1 le temps pour faire la première moitié, t_2 le temps pour la deuxième (en heures) et v la vitesse moyenne. On a les conditions

$$\frac{d}{2}=80t_1,\quad \frac{d}{2}=120t_2,\quad d=v(t_1+t_2).$$

(2) On résout