Mathématique

Systèmes linéaires, un peu de géométrie

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Systèmes linéaires : exemples I

Exemple 1: Dans un restaurant italien, nous avons commandé quatre pizzas identiques et deux cafés. Cela nous a coûté 38 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés. Leur addition était 50,5 euros. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

Exemple 2: Nous commandons encore quatre pizzas identiques et deux cafés. Mais les 4 convives ont également eu un apéritif identique, pour un total de 50 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés et cinq apéritifs (identiques) pour 65,5 euros. Quel est le prix d'un café, d'une pizza et d'un apéritif ?

Exemple 3: Le lendemain, on commande toujours quatre pizzas identiques et deux cafés, pour 44 euros. La table voisine commande cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés pour 58 euros. Une troisième table commande deux pizzas et un café pour une somme de 25 euros. On se pose la question habituelle.

Mise en équations

On s'attaque à l'exemple 1 :

1. Choix et dénomination des inconnues :
   Appelons p le prix d'une pizza et c le prix d'un café.
2. Mise en équations : pour notre table on a
   $$4p + 2c = 38$$
   Celle de la table voisine donne
   $$5p + 4c = 50,5.$$
   On les rassemble ces équations "{", comme ceci :
   $$\begin{cases} 4p + 2c & = & 38 \\ 5p + 4c & = & 50,5. \end{cases}$$
3. Résolution de ce *système linéaire* d'équations : on trouvera un seul couple de nombres $(p; c)$ qui rend vraies ces deux égalités, à savoir $p = 8,5$ et $c = 2$, ce que l'on écrit $(p; c) = (8,5; 2)$.
4. Vérification des solutions.

Les exemples 2 et 3

Pour l'exemple 2 :

1. Soit p le prix d'une pizza, c le prix d'un café et a le prix d'un apéritif.
2. Mise en équations : on a deux conditions vérifiées simultanément par les inconnues :
   - Pour notre table, on a : $4p + 2c + 4a = 50.$
   - Pour la table voisine, on a : $5p + 4c + 5a = 65,5.$

   On écrit le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p + 2c + 4a & = & 50 \\ 5p + 4c + 5a & = & 65,5. \end{array}\right.$$

3. On résout, et on vérifie. Il y a une infinité de solutions.

Pour l'exemple 3 :

1. On appelle p le prix de la pizza et c le prix d'un café, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p + 2c & = & 44 \\ 5p + 4c & = & 58 \\ 2p + c & = & 25. \end{array}\right.$$

2. Il s'agit ici d'un système de 3 équations linéaires à 2 inconnues.
3. On résout : il n'y a pas de solutions : $S = \varnothing$.

Systèmes linéaires : un exemple triangulaire

Exemple

Déterminer tous les couples de nombres $(x; y)$ qui vérifient les conditions

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 7 \\ & & 2y & = & 6. \end{array}\right. \tag{1}$$

- C'est aussi un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues;
- Il est plus simple car il est triangulaire : la deuxième équation ne fait pas intervenir le nombre inconnu x.

Le système d'équations (1) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 7 \\ & & y & = & 3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Cela veut dire qu'il a les mêmes solutions.
On a la valeur de y dans la deuxième équation, on peut la *substituer* dans la première, que l'on peut résoudre On a $S = \{(2; 3)\}$.

Systèmes linéaires : Définition

Juste pour avoir une définition formelle :

Définition

Un *système linéaire* de p équations à n inconnues $(p, n \in \mathbb{N}^*)$ est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p, \end{array}\right.$$

où les nombres $\{a_{11}, \ldots, a_{pn}\}$ sont donnés et appelés coefficients du système et où les nombres $\{b_1, \ldots, b_p\}$ sont donnés et forment le "terme indépendant".

Définition

Une solution du système est un n-uplet $(x_1; \ldots; x_n)$ de nombres qui satisfont toutes les équations.

Types de systèmes et équivalences

Définition

Un système linéaire (S) est

- *incompatible* s'il n'a pas de solution;
- *déterminé* s'il a une seule solution;
- *indéterminé* s'il admet une infinité de solutions.

Il n'y a pas d'autre possibilité. Je vous passe la démonstration.

Définition

Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits équivalents si ils admettent le même ensemble de solutions. On note alors $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$. Si toute solution de (S_1) est solution de (S_2), on dit que (S_1) implique (S_2) et on note $(S_1) \Rightarrow (S_2)$.

Idée de résolution : transformer un système en un système équivalent, mais plus simple. Répéter l'opération jusqu'à pouvoir résoudre le dernier système. Ses solutions seront alors exactement les solutions du premier.

Exemples

1. Le système d'équations en les inconnues x,y
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y &=& 2\\ y &=& 3\end{array}\right.$$
est déterminé puisqu'on a $S=\{(-2;3)\}$.
2. Le système d'équations en x, y donné par
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y &=& 2\\ 10x+8y &=& 4\end{array}\right.$$
est équivalent au système $5x+4y=2$ et est indéterminé puisqu'il admet comme ensemble de solutions
$$S=\left\{\left(\frac{2-4y}{5};y\right):y\in\mathbb{R}\right\}.$$
3. Le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y &=& 2\\ 10x+8y &=& 5\end{array}\right.$$
est incompatible : on note $S=\varnothing$.

Méthode du pivot

La méthode *d'élimination* présentée ici est attribuée à Carl Friedrich Gauss, mathématicien et physicien Allemand (1777-1855).

Proposition

Un système linéaire (S) est équivalent à tout système (S') obtenu

- *soit en multipliant les deux membres d'une des équations de (S) par un même nombre non nul;*
- *soit en remplaçant une équation (k) du système (S) par une équation obtenue en additionnant l'équation (k) et une équation (l) de (S), membre à membre;*
- *soit en permutant les équations du système (S).*

Utilisation : éliminer des inconnues, pour avoir un système triangulaire.
Avantage : Utilisation assez simple.
Inconvénient : ne fonctionne que pour les systèmes linéaires.

Méthode d'élimination

- On choisit une équation de (S) que l'on conserve comme première équation (par exemple (1)). On choisit une inconnue (par exemple x_1) présente dans cette équation, que l'on va *éliminer* des autres équations. Le coefficient de l'inconnue choisie dans l'équation choisie est appelé *pivot*.
- En additionnant un bon multiple de l'équation (1) à l'équation (i) de (S), on obtient un système équivalent où la nouvelle équation (i) ne contient plus l'inconnue x_1. On applique ce procédé à toutes les équations (i), $i \in \{2, \dots, p\}$.
- On obtient un nouveau système où seule la première équation contient l'inconnue choisie et où les $p-1$ dernières équations ne la contiennent plus.
- On recommence la procédure avec les équations qui restent.
- On arrive à un système dit triangulaire. Il est alors simple de le résoudre.

Exemple I

Soit le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & + & y & = & 7 \\ -x & + & 2y & = & 8. \end{array} \right.$$

On remplace la deuxième équation par sa somme avec la première (membre à membre). On a un système triangulaire :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ & & 3y & = & 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ & & y & = & 5. \end{array} \right.$$

On substitue la valeur de y dans la première équation, donc

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 5 & = & 7 \\ & & y & = & 5. \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(2; 5)\}$.

Exemple II

Soit le système

$$(S):\left\{\begin{array}{rrrcrl} 1x & +y & -z & = & 7 & (1)\\ -x & +2y & -z & = & 8 & (2)\\ 2x & -2y & +z & = & -3. & (3)\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & -z & = & 7 & (1)\\ & 3y & -2z & = & 15 & (4)\\ & -4y & +3z & = & -17. & (5)\end{array}\right.$$

Puis en additionnant 4 fois l'équation (2) et 3 fois l'équation (3),

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 7\\ & 3y & -2z & = & 15\\ & & z & = & 9.\end{array}\right.$$

On trouve z, puis on substitue pour avoir y, on substitue de nouveau pour avoir x. On a $S=\{(5;11;9)\}$. On vérifie !

Exemple moins simple

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ 3x & + & 11y & + & 3z & - & 5t & = & -15 \\ 2x & - & y & & & + & t & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & 3z & + & 3t & = & 4 \end{array}\right.$$

On soustrait 3 fois la première équation de la deuxième, 2 fois de la troisième, et 4 fois de la quatrième :

$$(S) \Leftrightarrow (S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & - & 5y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ & - & 5y & - & z & + & 3t & = & 8. \end{array}\right.$$

On recommence avec les équations (2), (3) et (4) :

$$(S_1) \Leftrightarrow (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & & & - & 2z & - & 4t & = & -8 \\ & & & - & z & - & 2t & = & -4. \end{array}\right.$$

On recommence avec (3) et (4), après changement de signe

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & & & & z & + & 2t & = & 4 \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

- On ne peut plus éliminer.
- Quelle que soit la valeur de t que l'on choisit, on peut obtenir la valeur de z : on a $z = 4 - 2t$.
- On obtient la valeur de y, puis on *substitue* ces valeurs dans la première équation, pour déterminer x. On a donc

$$S = \left\{ (x; y; z; t) = \left(\frac{-1}{5}; t - \frac{12}{5}; 4 - 2t; t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Mettre les valeurs trouvées pour x, y, z, t dans le bon ordre;
2. Vérifier, en substituant les valeurs trouvées dans le système de départ.

Derniers exemples et exercices

1. Résoudre le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 11 \\ 5x+4y & = & 10 \end{array}\right.$$

Comment faire pour éliminer x ? Comment faire pour éliminer y ?
On trouve le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 11 \\ -7y & = & -35 \end{array}\right.$$

Donc $y = 5$, puis $x = -2$. On vérifie. On note $S = \{(-2;5)\}$.

Ex. 1.2 Résoudre

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & +2z & = & 0 \\ x & & +z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x & & +z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & +2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x & & +z & = & -1 \\ & y & & = & 1 \\ & -y & & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système est incompatible : $S = \varnothing$.

Exercice résolu

Ex. 1.8 Résoudre

$$\left\{\begin{array}{llllc} x & +2y & +z & = & 2 \\ 3x & +8y & +4z & = & 7 \\ -x & +2y & +2z & = & -3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllc} x & +2y & +z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 1 \\ & 4y & +3z & = & -1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllc} x & +2y & +z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 1 \\ & & +z & = & -3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllc} x & +2y & +z & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ & & +z & = & -3. \end{array}\right.$$

Solution $x = 1; y = 2; z = 3$, on note $S = \{(1; 2; -3)\}$. On vérifie.

La méthode de substitution

L'idée de cette autre méthode, qui est équivalente à l'élimination, est également de faire "disparaître" des inconnues.

1. On choisit une équation que l'on résout par rapport à une des inconnues;
2. On utilise la relation obtenue pour substituer cette inconnue dans toutes les autres équations;
3. On recommence avec une autre inconnue.

Attention à ne pas tourner en rond !

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ -x+2y & = & 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -x+2y & = & 8. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -(7-y)+2y & = & 8. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ 3y & = & 15. \end{array}\right.$$

On trouve le nombre y dans la deuxième équation et on substitue alors la valeur de y dans la première équation : $S = \{(2;5)\}$.

Remarque : la méthode du pivot aurait donné le résultat plus rapidement car les calculs (équivalents) y sont mieux organisés.

Encore un exemple

On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+y-z & = & -25 \\ -x+2y+z & = & 15 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3x+y-z & = & -25 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3(2y+z-15)+y-z & = & -25 \\ 2(2y+z-15)-3y+2z & = & -16 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 7y+2z & = & 20 \\ y+4z & = & 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y+4z & = & 14 \\ 7y+2z & = & 20 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ 7(14-4z)+2z & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ -26z & = & -78. \end{array}\right.$$

On trouve $z=3$, que l'on substitue dans la deuxième équation. On trouve $y=2$, puis $x=-8$. La solution est donc $(x;y;z)=(-8;2;3)$.
On vérifie !

Un exemple en chimie

Déterminer les coefficients stœchiométriques x, y, z, t de la réaction (équilibrée)

$$x\mathrm{CH}_4 + y\mathrm{O}_2 \to z\mathrm{CO}_2 + t\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Principe : le nombre d'atomes est conservé lors de la réaction. En inspectant les réactifs et les produits, on obtient les conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4x & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} (C) \\ (H) \\ (O) \end{array}$$

Remarque : On ne peut pas espérer une solution unique !

Solution

On substitue progressivement en gardant toutes les équations. On écrit donc des systèmes équivalents.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4x & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4z & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Les solutions s'écrivent en fonction de z : on écrit en mathématiques

$$S = \{(x; y; z; t) = (z; 2z; z; 2z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

En chimie, il suffit de savoir que $(x; y; z; t) = (1; 2; 1; 2)$ est une solution, on écrit

$$\mathrm{CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O}.$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Problème résolu I

Exam Adrien et Bertrand jouent l'un contre l'autre aux échecs et comptent les points de la façon suivante : une victoire rapporte 3 points au gagnant tandis qu'un match nul rapporte un point à chaque joueur. Sachant qu'Adrien a remporté 6 parties, que Bertrand a 77 points et qu'ils ont joué en tout 37 parties, déterminer le nombre de matchs nuls.

1) 6 2) 8 3) 23 4) 28

Solution :

(1) Notons a le nombre de victoires d'Adrien, b le nombre de victoires de Bertrand et n le nombre de nuls.

(2) Les conditions de l'énoncé donnent un système d'équations, que l'on travaille tout de suite en utilisant la valeur de a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 6 \\ a+b+n & = & 37 \\ 3b+n & = & 77 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 6 \\ b+n & = & 31 \\ 3b+n & = & 77 \end{array}\right.$$

(3) En soustrayant par exemple la deuxième équation de la troisième, on trouve $b = 23$, puis $n = 8$, (on vérifie) et c'est bien n qui est demandé.

Problème résolu II

Exam Dans un parking, il y a des voitures et des motos. Il y a 180 véhicules et 500 roues. Si à la fin de la journée, tous les véhicules sortent et paient leur place, si toutes les voitures paient 10 euros, et toutes les motos 5 euros, quelle est la recette de la journée (en euros)?

1) 950 euros 2) 1150 euros 3) 1350 euros 4) autre montant

Solution :

(1) On cherche le nombre de voitures v et le nombre de motos m

(2) Ensuite, on demande $10v + 5m$.

(3) Les conditions de l'énoncé donnent

$$\begin{cases} 4v + 2m & = & 500 \\ v + m & = & 180 \end{cases}$$

(4) On procède par élimination ou par substitution pour obtenir $v = 70$ et $m = 110$. On vérifie.

(5) Ensuite, on a $10v + 5m = 1250$.
Comparer avec l'exercice 13.

Problème résolu III

Ex. 14 Il y a six ans, un père avait 6 fois l'âge de son fils. Dans trois ans, son âge ne sera plus que le triple de l'age de son fils. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

Solution :

(1) Que veut-on ? L'âge actuel du père (p) et celui du fils (f). Puis on fera la somme.

(2) On exprime les conditions :
Il y a 6 ans, leurs âges étaient $p-6$ et $f-6$. Donc $p-6=6(f-6)$.
Dans 3 ans, leurs âges seront $p+3$ et $f+3$, donc $p+3=3(f+3)$.
On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} p & = & 6f-30 \\ p & = & 3f+6 \end{array}\right.$$

(3) On fait la différence des équations et on obtient $3f-36=0$, ou $f=12$. Une des deux équations donne $p=42$. Que fait-on ?

(4) On vérifie

(5) On fait la somme et la réponse est 54.

Problèmes résolus IV

Ex. 12 A la boulangerie, si j'achète 5 tartes aux pommes et 3 tartes aux abricots, je dois payer 38 euros. Si j'achète 7 tartes aux pommes et une tarte aux abricots, je dois payer 34 euros. Combien devrais-je payer si j'achetais 2 tartes aux pommes et une tarte aux abricots ?

1. 12 euros
2. 14 euros
3. 16 euros
4. 18 euros

(1) Soit p le prix d'une tarte aux pommes et a celui d'une aux abricots.

(2) On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcll} 5p+3a & = & 38 & (1) \\ 7p+a & = & 34 & (2) \end{array}\right.$$

(3) On résout par substitution ou pivot : (2)-3.(1): $-16p=-64$

(4) On trouve $p=4$ et $a=6$. On vérifie. On calcule $2p+a=16$.

1. Les nombres réels x et y satisfont le système d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+8y & = & 3 \\ 9x-4y & = & 2. \end{array}\right.$

Que vaut $x+y$?

1. $-\frac{7}{12}$
2. $-\frac{2}{3}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{7}{12}$

(1) On obtient y en considérant l'équation $(2)-3(1)$: $-28y=-7$

(2) On obtient x en considérant l'équation $(1)+2(2)$: $21x=7$

(3) On vérifie.

Pourcentages

Quelques informations :

1. Les pourcentages sont des fractions : $30\% = \frac{30}{100}$, $15\% = \frac{15}{100}$...
2. Ajouter ou retirer un pourcentage d'un prix, d'une quantité... revient à multiplier par une faction adéquate : si un prix initial p augmente de 20%, le prix final F sera
$$F = p + \frac{20}{100}p = \frac{120}{100}p = 1,2p.$$
Si on a une réduction de 20% d'une quantité initiale Q, la quantité finale F sera
$$F = Q - \frac{20}{100}Q = \frac{80}{100}Q.$$
3. Les pourcentages de réductions ne s'additionnent pas, en général.
4. Tous ces problèmes sont des équations du premier degré. On peut prendre des valeurs numériques pour vérifier.

Deux Exercices (28,29 liste 2)

En décembre dernier, le prix du pull que je voulais m'acheter avait mystérieusement augmenté de 20%. Heureusement, à la fin janvier, le commerçant a dû afficher une ristourne de 40% sur ce nouveau prix. Quelle était la ristourne réelle sur le prix initial du pull.

1. 20%
2. 28%
3. 40%
4. autre rép.

(1) Soit p le prix initial du pull.
(2) Après augmentation de 20%, le prix est $p + \frac{20}{100}p = \frac{120}{100}p$
(3) Après diminution de 40%, le prix est $\frac{60}{100}\frac{120}{100}p = \frac{72}{100}p$
(4) C'est donc une diminution de 28%.

J'achète un téléphone à 80 euros TVA comprise. Le taux de TVA sur ce produit est de 21 %. Quel est le prix de ce téléphone hors TVA ?

1. $80 - \frac{21}{100}$ euros
2. $80 \times \frac{79}{100}$ euros
3. $80 \times \frac{100}{121}$ euros
4. $80 \times \frac{121}{100}$ euros

- Soit p le prix hors TVA.
- Le prix TVA Comprise est $80 = p + \frac{21}{100}p = \frac{121}{100}p$
- On trouve alors p.

Proportionnalités

(1) Si six scies scient six cigares, six cent six scies scient six cent six cigares : le nombre de cigares sciés est *directement proportionnel* au nombre de scies.

(2) Je suis allé au bar et j'ai acheté 7 bières (sans alcool). Cela m'a coûté 10 euro 50 cents. Si j'achète 14 bières, cela me coûtera 21 euros : le prix total est *directement proportionnel* au nombre de bières. Si on en commande 10 fois plus, on paiera 10 fois plus. Quel prix paiera-t-on pour 10 bières ?

Solution (le bon vieux passage par l'unité) :

1. On sait que 7 bières coûtent $10,5€$;
2. Donc une bière coûte $\frac{10,5€}{7} = 1,5€$;
3. Donc 10 bières coûtent $10 \times 1,5€ = 15€$.

Remarque : on n'est pas obligé de faire le calcul intermédiaire. La solution est $10,5€ \times \frac{10}{7}$.

Une écriture en tableaux

On peut écrire le raisonnement précédent au moyen d'un tableau :

$:7$ $\times 10$

Nombre de bières	7	1	10	21
Prix total (en €)	$10,5$	$1,5$	15	$1,5 \times 21$

$:7$ $\times 10$

Cependant :

- Un tableau est loin d'être nécessaire pour résoudre le problème;
- Il est plus naturel d'exprimer les étapes du raisonnement comme nous venons de le faire plus haut;
- Si on souhaite écrire un tableau, il faut bien préciser de quoi on parle;
- Le tableau ne constitue pas la solution, qu'il faut exprimer correctement.

Encore un exemple

Je vais à la mer en voiture et je roule à vitesse constante entre Liège et Bruxelles. Sur les six dernières minutes, j'ai parcouru 13,2 km. Combien de kilomètres vais-je parcourir d'ici 9 minutes ?

Solution : Le nombre de kilomètres parcourus est directement proportionnel au nombre de minutes écoulées.

On peut passer par l'unité :

1. On sait qu'en 6 minutes, on parcourt $13,2\mathrm{km}$;
2. Donc en 1 minute, on parcourt $\frac{13,2}{6}\mathrm{km}$;
3. Donc en 9 minutes, on parcourt

$$\left(\frac{13,2}{6} \times 9\right)\mathrm{km} = 13,2 \times \frac{3}{2}\mathrm{km} = 19,8\mathrm{km}.$$

Sous forme de tableau :

$\times$ t

:6 $\times 9$

Minutes écoulées	6	1	9	t
Kilomètres parcourus	$13,2$	$2,2$	$19,8$	$2,2 \times t$

:6 $\times 9$

$\times$ t

On peut aussi écrire une *Formule* (c'est le point de vue des scientifiques)

$$D = v_0 t,$$

où D est la distance parcourue, t le temps de parcours et v_0 la vitesse constante.
Cette formule lie les valeurs mesurées des "variables" D et t, tant qu'on est dans les conditions de l'énoncé. En exprimant la formule pour 6 min., on trouve $v_0 = 2,2 km/min$, puis pour 9 min, on a le résultat.

Formalisation

Définition

Deux quantités mesurables, (les variables scientifiques) sont directement proportionnelles si, quand la mesure de la première est multipliée par une constante C, alors la mesure de la deuxième est aussi multipliée par la même constante C.

Proposition

Une quantité mesurable (une variable) est directement proportionnelle à une autre si, et seulement si, il existe une constante réelle k telle que toute mesure de la première est obtenue en multipliant la mesure correspondante de la deuxième par k. Le coefficient k est appelé coefficient de proportionnalité (de la première variable en fonction de la deuxième variable.

En sciences, si on appelle X et Y les "variables", on écrit la formule :

$$Y = k\,X,$$

qui doit être vraie chaque fois que l'on mesure les variables X et Y.

Sous forme de tableau :

Mesures de var X	$\cdots$	1	$\cdots$	x_0
Mesures de var Y	$\cdots$	k	$\cdots$	$k \times x_0$

$\times x_0$

$\times x_0$

Le coefficient de proportionnalité est donc la valeur mesurée de Y quand la valeur mesurée de X vaut 1. Ceci justifie le passage par l'unité.

Quantités inversement proportionnelles

Question : Six ouvriers mettent 30 minutes pour déplacer un tas de sable d'un endroit à un autre. On suppose que chaque travailleur a les mêmes outils et effectue la même tâche. Combien de temps mettront 4 ouvriers pour déplacer le tas de sable ?
Cela ressemble à une règle de trois (il y a trois nombres, on cherche un quatrième), mais ce n'est pas une règle de trois : si il y a deux fois plus d'ouvriers, on ne mettra pas deux fois plus de temps.

1. On sait que 6 ouvriers mettent 30 minutes;
2. Un seul ouvrier met $30 \times 6 = 180$ minutes;
3. Quatre ouvriers mettent $\left(\frac{30\times 6}{4}\right)$ minutes $= 45$ minutes.

Un tableau et une définition

$: 6$ $\times 4$

Nombre de travailleurs	6	1	4
Temps de transport	30	180	45

$\times 6$ $: 4$

Définition

Deux quantités mesurables sont inversement proportionnelles si, quand la mesure de la première est multipliée par une constante C *non nulle*, alors la mesure de la deuxième est divisée par cette constante C.

Proposition

Deux quantités mesurables (ou variables) sont inversement proportionnelles à une autre si, et seulement si, il existe une constante réelle k non nulle telle que le produit des mesures des deux variables est toujours égal à k.

C'est équivalent au fait que l'une des variables soit directement proportionnelle à l'inverse de l'autre. En sciences, on écrit les formules

$$X\,Y = k,$$

ou

$$X = \frac{k}{Y},$$

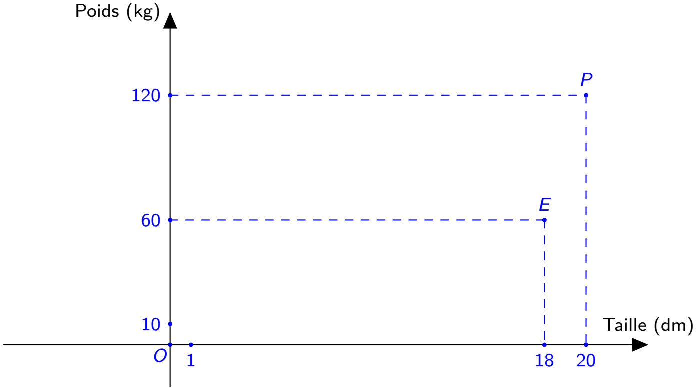
ou encore

$$Y = \frac{k}{X}.$$

Dans l'exemple, le produit du nombre de travailleurs et du temps de travail est égal à 180 minutes $\times$ hommes.

Géométrie : une question

Voici une situation classique en sciences :



Quelle est la distance entre le point P représentant le professeur et le point E représentant l'étudiant de corpulence moyenne ?

Points, droites, plans

Les définitions données sont en général valables en géométrie plane, ou en géométrie dans l'espace. Quand une propriété n'est vraie qu'en géométrie plane, on avertit en indiquant "Dans le plan...".

1. Un *point* est un objet géométrique qui n'a pas d'extension dans l'espace : il n'a pas d'épaisseur et pas de longueur ("un point est ce qui ne comporte aucune partie").
2. Une *droite* est un ensemble de points alignés, qui n'a pas de "largeur", et qui s'étend à l'infini dans les deux sens.
   Visualisation : un stylo, prolongé à l'infini par la pensée.
3. Un *plan* est un ensemble infini de points. Il n'est pas courbe.
   Visualisation : une table, prolongée à l'infini par la pensée.
4. On définit de même une demi-droite $[A, B$ et un segment de droite $[A, B]$.

Postulat

Par deux points distincts A et B, il passe une et une seule droite. Cette droite est notée AB. Par trois points A, B, C de l'espace, non alignés (non sur une même droite) il passe un et un seul plan. On le note ABC.

Positions relatives de droites dans le plan

Définition

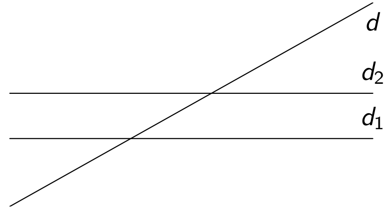
Dans le plan, deux droites d_1 et d_2 dont l'intersection est un singleton $\{I\}$ sont dites sécantes (au point I). Dans le cas contraire, elles sont dites parallèles, et on note $d_1 /\!/ d_2$.

Attention : quand les droites d_1 et d_2 sont confondues (égales), elles sont parallèles.

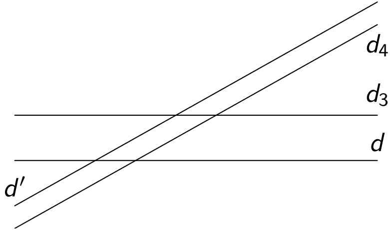
Proposition

1. *Dans le plan, si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, alors toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.*
2. *Dans le plan, si deux droites d_3 et d_4 sont sécantes, toute parallèle à l'une est sécante à l'autre.*

Voyez :



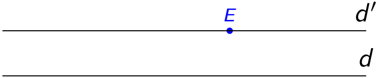
et



Le postulat le plus célèbre

Postulat (Euclide)

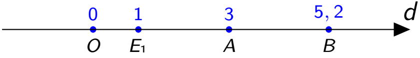
Par un point (extérieur) à une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite.



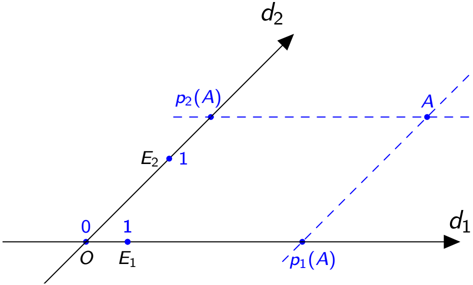
Cela va être utile pour construire des coordonnées cartésiennes des points du plan.

Repères et coordonnées cartésiennes du plan

Nous avons appris à représenter les nombres naturels, entiers, rationnels puis réels sur une droite. On a donc une correspondance entre les points de "la droite" et les nombres réels.



La notion de repère cartésien du plan prolonge cette idée. Voyez :



On associe un nombre réel a_1 à $p_1(A)$ et un nombre a_2 à $p_2(A)$. Ainsi au point A correspond un couple de nombres (a_1, a_2).

Formalisation

Définition

Un repère cartésien du plan est la donnée :

1. D'un couple de droites (d_1,d_2) sécantes en un point O. Ce point est l'origine du repère tandis que d_1 et d_2 en sont les axes;
2. D'un point E_1 distinct de O sur la droite d_1;
3. D'un point E_2 distinct de O sur la droite d_2.

La donnée des points E_1 et E_2 permet d'*orienter* les droites d_1 et d_2, et d'établir une *graduation* sur chaque axe.

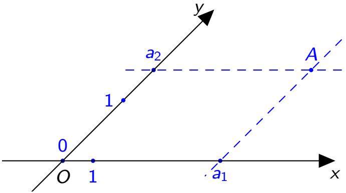
Définition

La parallèle à l'axe d_2 tracée par un point A coupe l'axe d_1 en un point $p_1(A)$ appelé projection de A sur d_1, parallèlement à d_2.
La parallèle à l'axe d_1 tracée par un point A coupe l'axe d_2 en un point $p_2(A)$ appelé projection de A sur d_2, parallèlement à d_1.

Les nombres réels a_1 et a_2 associés à $p_1(A)$ et $p_2(A)$ sur leurs axes gradués sont *l'abscisse* et *l'ordonnée* de A. On note $A : (a_1, a_2)$.

Formalisation II

- Le couple (a_1, a_2) formé par l'abscisse et l'ordonnée d'un point A est le couple de *coordonnées* de A dans le repère donné.
- Par habitude, on note x l'abscisse et y l'ordonnée d'un point du plan. On note aussi x le premier axe du repère et y le second.
- L'association point du plan – couple de coordonnées est une bijection (on dit aussi "correspondance biunivoque") :
  - deux points distincts ont des coordonnées distinctes;
  - tout couple de nombres réels (a_1, a_2) est le couple de coordonnées d'un point A.



Cette bijection permet de représenter de manière géométrique une situation où il n'y a que des nombres, et de traiter de manière algébrique une situation géométrique.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

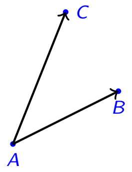
Vecteurs liés : définition géométrique

Les définitions suivantes sont valides dans le plan ou dans l'espace.

Définition

Un vecteur lié en un point A est un couple (A, B). De manière équivalente, il est défini par un segment orienté de A vers B. On le note parfois $\overrightarrow{AB}$ et on le représente par une flèche de A à B.

Deux vecteurs liés en A.

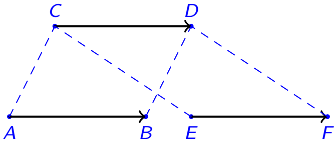


En physique, le vecteur peut représenter une force, en mathématique, on peut le voir comme une translation.

Equipollence et vecteurs libres

Définition

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme, ou s'ils sont équipollents à un même troisième. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.



Remarque : on n'a pas ici $(A, B) \uparrow (D, C)$: l'ordre a de l'importance.

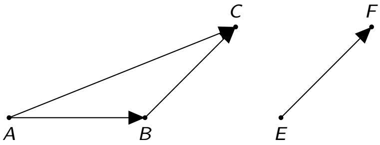
Définition

Un vecteur libre est un ensemble de vecteurs liés équipollents entre eux. Chacun de ces vecteurs liés est un représentant du vecteur libre en question. On note aussi $\overrightarrow{AB}$ le vecteur libre représenté par (A, B).

45 Si $(A, B) \uparrow (C, D)$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent la même force.

Addition des vecteurs (libres)

- On définit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (c'est la relation de Chasles). Cette définition est *indépendante du représentant du vecteur*. Dans la figure suivante, on a donc aussi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$, si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$.



- L'addition est associative et suit la règle du parallélogramme;
- Le vecteur (libre) $\overrightarrow{AA}$ est neutre pour l'addition. On le note $\overrightarrow{0}$. C'est le vecteur nul.
- Alors l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$. On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.
- On définit alors la soustraction $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ de deux vecteurs par

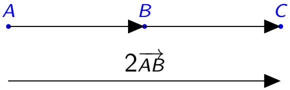
$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}).$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Multiplication scalaire (par des nombres)

Une définition que l'on étend petit à petit :

1. Exemple : calcul de $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. On trouve C t.q. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



2. Cela permet de définir $n\overrightarrow{AB}$ pour n entier positif.
3. On pose naturellement $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, et $(-n)\overrightarrow{AB} = -(n\overrightarrow{AB})$.
4. On a ainsi défini la multiplication par les nombres entiers, on peut l'étendre aux rationnels (via le théorème de Thalès), puis aux réels.

Ces opérations induisent des opérations sur les vecteurs liés en un point A, puisque tout vecteur lié en A définit un unique vecteur libre, et vice-versa. Cela donne lieu à la célèbre règle du parallélogramme.

Définition

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ est multiple d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ s'il existe un réel r tel que $\overrightarrow{v} = r\,\overrightarrow{u}$. On montre que, quel que soit $\overrightarrow{v}$, $0\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{0}$ est multiple de tour vecteur.

Propriétés des opérations

L'addition et la multiplication par les scalaires satisfont les propriétés suivantes (on note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, ... des vecteurs quelconques)

1. L'addition de deux vecteurs est un vecteur et la multiplication d'un vecteur par un nombre est un vecteur;
2. L'addition est associative : on a $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$;
3. L'addition admet un élément neutre $\overrightarrow{0}$ satisfaisant $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$;
4. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un opposé $-\overrightarrow{u}$ pour l'addition, satisfaisant $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=(-\overrightarrow{u})+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$;
5. L'addition est commutative : on a $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$;
6. La multiplication scalaire distribue l'addition des vecteurs : on a $r(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=r\overrightarrow{u}+r\overrightarrow{v}$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $r\in\mathbb{R}$;
7. La multiplication scalaire distribue l'addition des réels : on a $(r+s)\overrightarrow{u}=r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{u}$ pour tous $r,s\in\mathbb{R}$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$;
8. On a $r(s\overrightarrow{u})=(rs)\overrightarrow{u}$ pour tous $r,s\in\mathbb{R}$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$;
9. On a $1\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$.

Nous avons déjà rencontré ces propriétés. En mathématiques, tout ensemble (non vide) ayant ces propriétés est appelé espace vectoriel.

Combinaisons linéaires et milieu d'un segment

En combinant les deux opérations, on peut former des multiples et des sommes de plusieurs vecteurs. Les règles de priorité concernant les additions, multiplications et parenthèses sont celles déjà rencontrées.

Définition

La combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ avec les coefficients réels $r_1, \ldots, r_n$ est le vecteur

$$\overrightarrow{u} = r_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + r_n \overrightarrow{u_n}.$$

Dans la pratique, on a rarement (sauf les mathématiciens) besoin de considérer des combinaisons linéaires de plus de trois vecteurs, pour faire de la géométrie dans l'espace. On écrit alors $r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ ou $r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w}$.

Définition

Soit $[A, B]$ un segment de droite. Le milieu de $[A, B]$ est l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Composantes de vecteurs associées à un repère

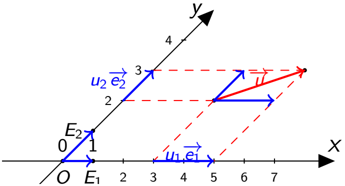
On considère un repère, déterminé par trois points O, E_1, E_2. On note $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$.

Proposition

Tout vecteur (libre) $\overrightarrow{u}$ se décompose de manière unique comme

$$\overrightarrow{u} = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2},$$

où u_1, u_2 sont des nombres réels. On note $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$. Ce sont les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans le repère.



Remarques : (a) Le couple $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est la base associée au repère.
(b) En physique, on dit parfois que l'on projette le vecteur sur les axes.

Composantes de combinaisons linéaires

Proposition

Si $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$ *et* $r \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} : (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \quad \textit{et} \quad r\overrightarrow{u} : (ru_1, ru_2).$$

En particulier pour tous $r, s \in \mathbb{R}$,

$$r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} : (ru_1 + sv_1, ru_2 + sv_2).$$

Preuve : Si $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$, alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1)\overrightarrow{e_1} + (u_2 + v_2)\overrightarrow{e_2}, \quad \text{et} \quad r\overrightarrow{u} = (ru_1)\overrightarrow{e_1} + (ru_2)\overrightarrow{e_2}.$$

Suggestion : Dessinez cette proposition.

Addition des couples ou triplets de réels

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est formé des couples de nombres réels :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^3$ est formé par les triplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

On écrit ces couples ou triplets avec la virgule comme séparateur sauf si cela prête à confusion.

Addition dans $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Multiplication dans $\mathbb{R}^2$:

$$r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2).$$

Soustraction :

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2).$$

Les mêmes opérations sont définies sur $\mathbb{R}^3$. Ces opérations ont les propriétés listées à la page 16 pour les vecteurs.

Lien avec les coordonnées

Soit un repère cartésien défini par O, E_1 et E_2. Vu la définition des composantes et des coordonnées, on a le lien suivant.

Proposition

Pour tout point A du plan, les coordonnées de A dans un repère sont les composantes de $\overrightarrow{OA}$ dans ce repère.

Si B est un autre point du plan , on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, ou

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Proposition

Dans un repère, si $A : (a_1, a_2)$ et si $B : (b_1, b_2)$, alors

$$\overrightarrow{AB} : (b_1, b_2) - (a_1, a_2).$$

Repère de l'espace

- C'est la même histoire... Il faut seulement trois axes gradués. On les détermine avec quatre points O, E_1, E_2, E_3 non situés dans un même plan.
- On note $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OE_3}$.
- Tout point A de l'espace est déterminé par trois coordonnées, mais on doit utiliser des plans pour le voir.

Proposition

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$. Les coefficients de la combinaison linéaire sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le repère.

Les raisonnements tenus pour les vecteurs du plan s'étendent pour des vecteurs de l'espace.

Exercices résolus

Ex. 16 Soit $ABDC$ un parallélogramme et E le milieu de $[A, D]$. Montrer que E est le milieu de $[B, C]$.

(1) Faire un schéma. Attention à l'ordre des points.

(2) Hypothèses : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$. Thèse : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$.

(3) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.

Ex. 18.2 $3(5;-2)-2(4;-1)+(10;2) = (15;-6)+(-8;2)+(10;2) = (17;-2)$

Ex. 19.2 $(4;0;6)-(-1;3;2)+3(1;3;1) = (4+1+3;0-3+9;6-2+3) = (8;6;7)$

Ex. 23 Si $A:(1;2)$, $\quad B:(4;3)$, $\quad C:(3;4)$ alors

1) on a $\overrightarrow{AB} : (4;3)-(1;2) = (3;1)$ et $\overrightarrow{AC} : (3;4)-(1.2) = (2;2)$,

2) on a $3\overrightarrow{AB} : 3(3;1) = (9;3)$

3) on a $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} : 3(3;1)-2(2;2) = (5;-1)$

4) si X satisfait $\overrightarrow{AX} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, on pose $X(x_1;x_2)$ et l'éq. est

$$(x_1;x_2)-(1;2) = 3((3;1)+(2;2)) \quad \text{ou} \quad (x_1-1;x_2-2) = (15;9)$$

donc $X:(16;11)$.

5) Le milieu $M:(m_1;m_2)$ est t.q. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, ou $(m_1;m_2)-(1;2) = (4;3)-(m_1;m_2)$. Donc $m_1 = \frac{1+4}{2}$, $m_2 = \frac{2+3}{2}$.

6) On fait de même pour $E:(e_1;e_2)$ et $F:(f_1;f_2)$, et $M:\left(\frac{e_1+f_1}{2};\frac{e_2+f_2}{2}\right)$.