LIÈGE université

Mathématique

Equations de droites dans le plan, géométrie métrique, trigonométrie

Pierre Mathonet

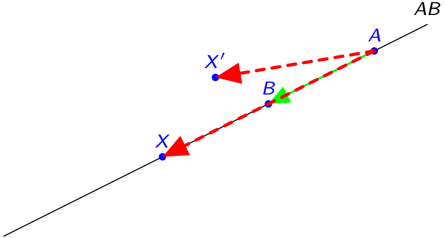
Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Equations de droites dans le plan

- Données : une droite, et un repère cartésien du plan, donné par O, E_1, et E_2 (ou O, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$).
- **But 1** : déterminer des coordonnées de certains points de la droite (équation paramétrique);
- **But 2** : étant donné un point X du plan, déterminer si oui ou non il appartient à la droite (une équation cartésienne), au moyen d'une relation simple à vérifier sur les coordonnées de X.

L'idée se voit :



Donc on a $X \in AB$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AX}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$.

Equations paramétriques de AB

D'après ce que nous avons vu, si dans le repère déterminé par O, E_1 et E_2, on a $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$ (avec $A \neq B$) alors on a toujours

$$X \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = r\overrightarrow{AB}.$$

C'est une équation paramétrique vectorielle de AB.
En termes des coordonnées de X, on a toujours

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - a_1 & = & r(b_1 - a_1) \\ y - a_2 & = & r(b_2 - a_2) \end{array} \right. \qquad (1)$$

Ce sont des équations paramétriques cartésiennes de AB.
Exemple : Ecrire des équations paramétriques cartésiennes de la droite contenant $A : (2, 4)$ et $B : (-2, 5)$.
Question 1 : Donner les coordonnées d'un autre point de AB.
Question 2 : Le point $C : (10, 3)$ appartient-il à AB ?
Question 3 : Comment exprimer la condition ci-dessus sans utiliser le paramètre r ?

Equations cartésiennes de AB

Pour obtenir une équation cartésienne de AB, il suffit d'exprimer la condition (1). Trois cas peuvent se produire :

- $b_1 - a_1 \neq 0,\ b_2 - a_2 \neq 0$: alors

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}. \tag{2.2}$$

- $b_1 = a_1,\ b_2 - a_2 \neq 0$: alors AB est parallèle à l'axe y et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow x - a_1 = 0. \tag{2.3}$$

- $b_1 - a_1 \neq 0,\ b_2 = a_2$: alors AB est parallèle à l'axe y et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow y - a_2 = 0. \tag{2.4}$$

En résumé : on applique le cas général (2.2), et quand un dénominateur s'annule, on remplace l'équation par l'annulation du numérateur correspondant. Ou encore :

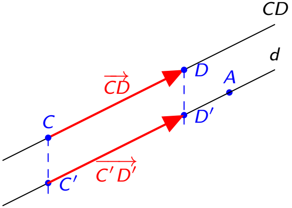
$$\boxed{AB \equiv (b_2 - a_2)(x - a_1) = (b_1 - a_1)(y - a_2)}.$$

ou si $b_1 \neq a_1$,

$$\boxed{AB \equiv y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)}.$$

Droite donnée par un point et un vecteur directeur

- On se donne un vecteur libre $\overrightarrow{v}$ non nul: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ avec $C \neq D$.
- On se donne un point A.
- Il existe une seule droite d parallèle à CD et passant par A.



- On a $X \in d$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AX}$ est multiple de $\overrightarrow{v}$.
- On remplace donc $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ dans les développements précédents.

Pour obtenir une équation cartésienne de d, on procède comme plus haut. Trois cas peuvent se produire :

- $v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0$: alors

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}. \tag{2}$$

- $v_1 = 0,\ v_2 \neq 0$: alors AB est parallèle à l'axe y et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow x - a_1 = 0. \tag{3}$$

- $v_1 \neq 0,\ v_2 = 0$: alors AB est parallèle à l'axe y et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow y - a_2 = 0. \tag{4}$$

En résumé : on applique le cas général (2.2), et quand un dénominateur s'annule, on remplace l'équation par l'annulation du numérateur correspondant. On peut aussi écrire

$$\boxed{AB \equiv v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2)}.$$

Cette équation prend en compte tous les cas.

Equation générale et pente

- Toute droite admet donc une équation du type

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0). \tag{5}$$

- Si $b \neq 0$, on peut mettre cette équation sous la forme $y = mx + p$.
- Si $b = 0$, on peut la mettre sous la forme $x = d$.

Définition

La pente de la droite AB est le nombre $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$, si $b_1 \neq a_1$. On la note souvent m, ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Si $b_1 = a_1$, on dit que AB n' pas de pente ou que la pente est infinie.

La pente est indépendante des points A, B qui définissent la droite.
Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur, alors la pente est $m = \frac{v_2}{v_1}$, si $v_1 \neq 0$.

Faire un schéma avec deux points A et B, visualiser la pente.

Pente – équation générale – vecteur directeur

De la pente à une équation : soit d une droite et $A : (a_1; a_2) \in d$.

(1) Si la pente de d est m, alors $d \equiv y - a_2 = m(x - a_1)$.

(2) Si la pente de d est infinie, alors $d \equiv x = a_1$.

D'une équation aux points : (1) $d \equiv y = mx + p$ ou (2) $d \equiv x = d$.

(1) Dans le premier cas $A : (0; p)$ et $B : (1; m + p)$ sont sur d.
Remarque : p est appelé ordonnée à l'origine.

(2) Dans le deuxième cas $A : (d; 0)$ et $B : (d; 1)$ sont sur d.

D'une équation à la pente : avec les mêmes équations.

(1) Puisque A et B sont sur d, la pente est $\frac{m+p-p}{1-0} = m$.

(2) Si $d \equiv x = d$, alors $(d; 0)$ et $(d; 1)$ sont sur d. La pente est infinie.

Exemple : Que vaut la pente de $d \equiv 2x + 5y = 17$? La pente vaut $-\frac{2}{5}$.
Que vaut la pente de $d' \equiv mx + y + 3 = 0$? La pente vaut $-m$.

D'une équation aux vecteurs directeurs : avec les mêmes équations.

(1) Dans le premier cas $(1; m)$ (et ses multiples) est un vecteur directeur

(2) Dans le deuxième cas $(0; 1)$ (et ses multiples) est un vecteur directeur

D'une équation aux vecteurs directeurs : soit $d \equiv ax + by + c = 0$.

(1) $\overrightarrow{v} : (-b; a)$ est un vecteur directeur.

Exemples – Exercices résolus

Faire l'Ex 1.

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite AB si

Ex 2.1 $A:(2;3)$, $B:(3;6)$: $\overrightarrow{AB}:(3-2;6-3)=(1;3)$, donc

$$AB \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}, \quad \text{ou} \quad y=3x-3.$$

Ex 2.2 $A:(2;3)$, $B:(4;3)$: $\overrightarrow{AB}:(-2;0)$, donc $AB \equiv \frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{0}$! Cas particulier!

$$AB \equiv y=3.$$

Ex 2.5 $A:(1;5)$, $B:(2;9)$: $\overrightarrow{AB}:(1;4)$, donc

$$AB \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{4}, \quad \text{ou} \quad y=4x+1.$$

2. Déterminer la pente des droites d déterminées par
   1. Les points $A:(3;4)$ et $B:(5;-3)$. La pente vaut $\frac{-3-4}{5-3}=-\frac{7}{2}$.
   2. L'équation $3x+5y=7$. L'éq est $y=\frac{7-3x}{5}$. La pente vaut $-\frac{3}{5}$.
   3. Le point $A:(2;7)$ et le vect. dir. $\overrightarrow{v}:(4;9)$. La pente vaut $\frac{9}{4}$.

3. Déterminer un vect. dir. de $d \equiv 2x+3y+7=0$. $\overrightarrow{v}:(-3;2)$.

Conditions de parallélisme – déterminants

On se donne les droites $d \equiv ax + bx + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$. Leur intersection a pour équation

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique ssi $ab' - a'b \neq 0$. Les droites sont parallèles ssi $ab' - a'b = 0$. Si $bb' \neq 0$, cela s'écrit $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$.

Proposition

- Deux droites admettant des pentes m et m' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Deux droites sont parallèles ssi elles admettent les mêmes ensembles de vecteurs directeurs.
- Si $d \equiv ax + by + c = 0$, toute parallèle d' à d admet une équation du type $d' \equiv ax + by + c' = 0$, ou un multiple non nul de cette équation (membre à membre).

 Rem. La parallèle à $d \equiv ax + by + c = 0$ passant par $(0; 0)$ a pour éq. $ax + by = 0$.

Droites en dimension 3

On fixe un repère, on a des coordonnées et des composantes. Deux points $A : (a_1; a_2; a_3)$ et $B : (b_1; b_2, b_3)$ distincts déterminent une droite. On a $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1; b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, et ona toujours

$$X \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = r\overrightarrow{AB}.$$

Si $X : (x; y; z)$, cette équation s'écrit

$$X : (x; y; z) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - a_1 & = & r(b_1 - a_1) \\ y - a_2 & = & r(b_2 - a_2) \\ z - a_3 & = & r(b_3 - a_3) \end{array} \right.$$

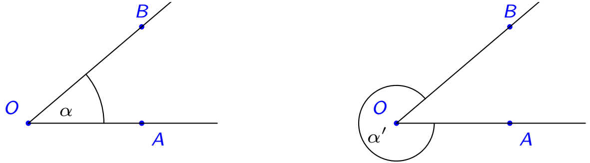
On élimine le paramètre comme en dimension 2, et on obtient

$$AB \equiv \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3},$$

avec la convention habituelle (déno nul, on annule le numérateur).
Remarques Il n'y a plus de notion de pente. On a deux contraintes pour une droite. Avec une seule contrainte, on aurait un plan.

Géométrie métrique : Angles non orientés du plan

- Dans le plan, un angle (non orienté) est une portion de plan déterminée par deux demi-droites de même origine :



  Il y en a deux, et on doit préciser lequel on considère.
- L'angle (non orienté) est indépendant de l'ordre dans lequel on précise les demi-droites et se mesure en degrés.
- Cas particuliers : angle nul, plein, plat, droit
- Dans l'espace, c'est la même chose.

Définition

Deux droites (du plan ou de l'espace) sont perpendiculaires si elles sont sécantes et si les angles qu'elles déterminent sont droits. Deux droites de l'espace sont orthogonales si elles sont parallèles (2 à 2) à des droites perpendiculaires.

Angles non orientés, compléments

Quelques angles non orientés :

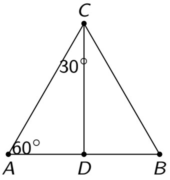


Figure: Un triangle équilatéral et des angles de 60° et 30°.

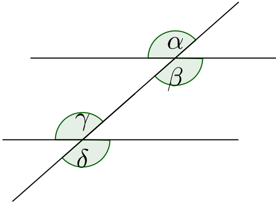


Figure: Des angles égaux déterminés par une sécante sur des parallèles.

Quelques résultats

Proposition 2.4.1 p.30

Une sécante détermine avec deux droites parallèles des angles opposés par le sommet, alternes internes, correspondants et alternes externes de même amplitude.

Proposition 2.4.2 p.30

Des angles à côtés parallèles sont soit égaux, soit supplémentaires. Des angles à côtés perpendiculaires sont soit égaux, soit supplémentaires.

Figure: Des angles à côtés parallèles et perpendiculaires

Géométrie euclidienne : distances

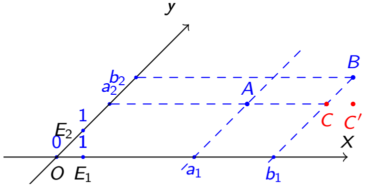
- En géométrie, la distance entre deux points A et B dans le plan ou dans l'espace est mesurée avec une latte graduée. Elle s'exprime en cm, m, ... On la note $d(A, B)$ ou encore $\overline{AB}$.

Théorème (Pythagore)

Un triangle ABC est rectangle en C si, et seulement si, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

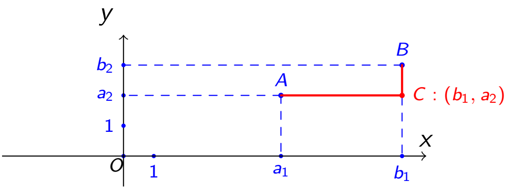
- Calcul de la distance dans un système d'axes :



- Les coordonnées de C sont faciles à trouver, mais ne servent à rien pour calculer la distance.
- Les coordonnées de C' ne sont pas faciles à trouver.

Cas particulier : repères orthonormés

- En géométrie, un repère orthonormé du plan est un repère où les axes sont perpendiculaires et où les points E_1, E_2 sont à la même distance de O.
- Un repère orthonormé de l'espace est formé de trois axes perpendiculaires deux à deux, où les points E_1, E_2, E_3 sont à la même distance de O.



Les longeurs des segments $[A, C]$ et $[C, B]$ sont données par $|b_1 - a_1|$ et $|b_2 - a_2|$ respectivement.

Calcul de la distance dans un repère orthonormé

Proposition

Dans un repère orthonormé du plan, la distance du point A ayant pour coordonnées (a_1, a_2) au point B ayant pour coordonnées (b_1, b_2) est donnée par

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{6}$$

Dans un repère orthonormé de l'espace la distance du point A ayant pour coordonnées (a_1, a_2, a_3) au point B ayant pour coordonnées (b_1, b_2, b_3) est donnée par

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{7}$$

Exemple : dans un repère orthonormé du plan, la distance entre $A : (-2, 4)$ et $B : (3, 5)$ est

$$\sqrt{(3 - (-2))^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{26}.$$

Vecteurs libres en géométrie euclidienne

- En géométrie euclidienne, les nombres calculés via (6) ou (7) sont appelés longueur ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On la note $|\overrightarrow{AB}|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- En sciences, on parle rarement de longueur, mais bien de norme. Si $\overrightarrow{v}$ modélise une force, alors sa norme est son intensité (et s'exprime donc dans les unités adéquates).
- Nous avons défini un vecteur libre comme un ensemble de couples équipollents. En géométrie euclidienne, puisqu'on a la notion de norme à disposition, on peut donner une autre caractérisation : un vecteur non nul est caractérisé par
  1. sa direction (une droite dont c'est un vecteur directeur);
  2. sa norme;
  3. son sens.

Cercles et sphères

Définition

Le cercle de centre C et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble de tous les points X du plan qui sont à une distance r de C.

Dans un repère orthonormé du plan, si $C : (c_1, c_2)$, alors un point X de coordonnées (x, y) est sur le cercle en question si, et seulement si

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

C'est l'équation cartésienne du cercle de centre C et de rayon r.

Définition

La sphère de centre C et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble de tous les points X de l'espace qui sont à une distance r de C.

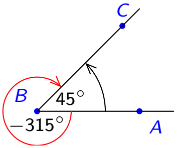
Dans un repère orthonormé de l'espace, si $C : (c_1, c_2, c_3)$, alors un point X de coordonnées (x, y, z) est sur la sphère en question si, et seulement si

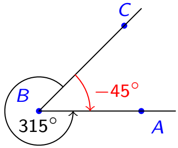
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2.$$

C'est l'équation cartésienne de la sphère de centre C et de rayon r.
Si $r = 0$, le cercle et la sphère de centre C et de rayon r sont réduits à $\{C\}$.

Angles orientés du plan, angles de vecteurs

- Dans le plan, on a deux sens de rotation :
  1. Le sens trigonométrique positif, opposé à celui des aiguilles de la montre;
  2. Le sens trigonométrique négatif : celui des aiguilles de la montre.



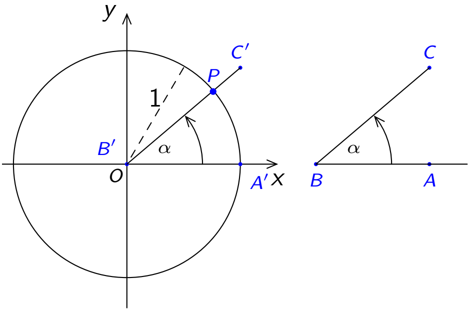


L'angle $\widehat{ABC}$ vaut 45 degrés. L'angle $\widehat{CBA}$ vaut 315 degrés (ou -45 degrés).

- L'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan est défini en liant ces vecteurs en un point.
- Dans l'espace, il n'y a pas de sens trigonométrique privilégié, donc pas d'angle orienté entre deux demi-droites ou deux vecteurs.

Le cercle trigonométrique I

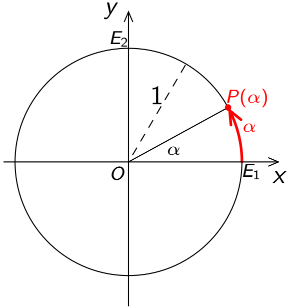
- On se donne un système d'axes orthonormés du plan, d'origine O et d'axes (gradués) x et y;
- Le *cercle trigonométrique* est cercle ***de rayon 1***, centré à l'origine O;



Tout angle orienté $\widehat{ABC}$ permet de définir un point P sur le cercle trigonométrique, et vice versa.
Attention, les angles sont orientés.

Degrés et radians

- Nous avons associé à chaque amplitude α (en degrés) un point P sur le cercle trigonométrique.
- Ce point peut aussi être repéré par la longueur d'arc parcourue (également notée α), entre le point E_1 définissant le repère et le point P;
- Cette longueur d'arc est comptée positivement si on suit le sens trigonométrique positif et négativement sinon.



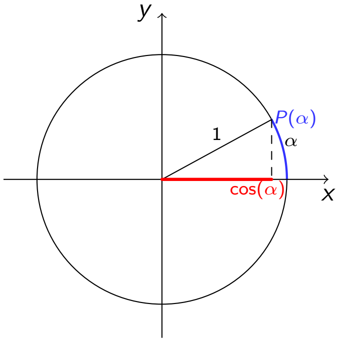
 Le périmètre du cercle est 2π, et correspond à 360 degrés;

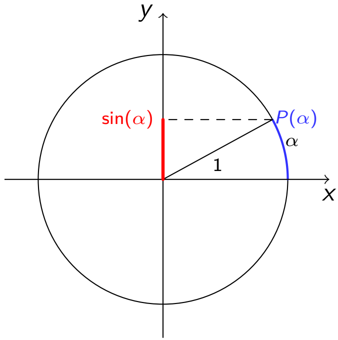
Nombres trigonométriques, définitions I

Soit α l'amplitude d'un angle exprimée en radians ou en degrés. Par définition, les coordonnées du point P correspondant du cercle trigonométrique sont

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

On a donc





Attention, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont des coordonnées et non des longueurs : ce sont des nombres éventuellement négatifs, compris entre -1 et 1.

Nombres trigonométriques, définitions II

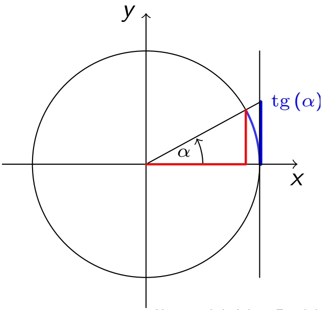
On définit la tangente et cotangente de α par

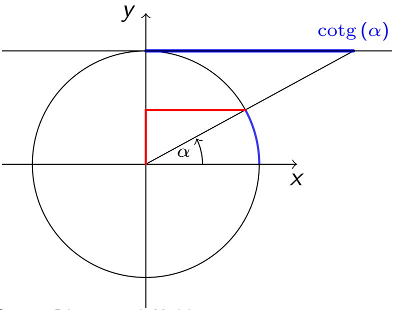
$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.}$$

Bien sûr, ces nombres ne sont définis que si le dénominateur est non nul :

- $\operatorname{tg}(\alpha)$ est défini pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
- $\operatorname{cotg}(\alpha)$ est défini pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

On peut les représenter de manière géométrique.





Premières propriétés I

Proposition (Relation fondamentale)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a la relation fondamentale :*

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.}$$

Proposition (2π-Périodicité)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha).$$

En général, pour tout $k \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha).$$

De même, on a

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha) \quad \textit{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha).$$

Premières propriétés II

Proposition (Angles opposés)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Proposition (Angles supplémentaires)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Proposition (Angles antisupplémentaires)

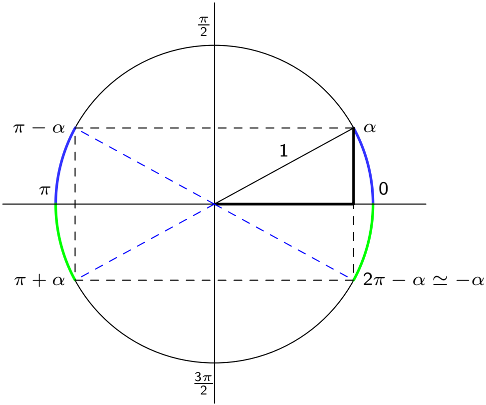
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha),$$

et donc $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha)$ *et* $\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha)$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

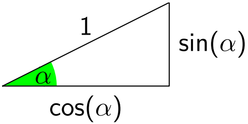
Une bonne nouvelle : cela se voit

Ces résultats sont dus aux symétries de la figure suivantes, qui préservent les longueurs.

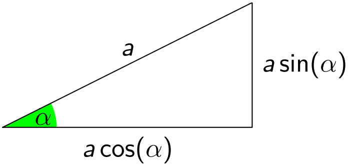


Relations dans les triangles rectangles

Attention, on parle ici de longueurs, et d'angles non orientés, compris entre 0 et 90 degrés (car on a des triangles rectangles).

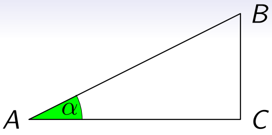


Mais le triangle obtenu en multipliant toutes les dimensions du triangle précédent par un nombre positif a est *semblable* à celui-ci et a donc les mêmes angles :



Les rapports entre les longueurs des côtés sont donc les mêmes que dans le cas précédent.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.



On a alors les relations suivantes (avec la notation introduite plus haut pour la distance)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \mathrm{tg}\,(\alpha).$$

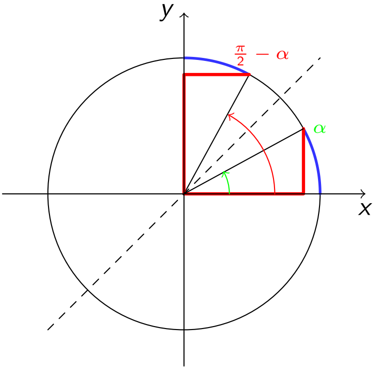
que l'on peut retenir par

- "sinus=côté opposé sur hypoténuse" (le sinus est si loin);
- "cosinus=côté adjacent sur hypoténuse" (le cosinus est collé);
- "tangente =côté opposé sur côté adjacent";
- ou encore "S.O.H.C.A.H.T.O.A".

Cependant, il est préférable de tracer le cercle trigonométrique et d'y placer un triangle semblable à celui considéré, plutôt que de mémoriser des sigles qui perdent vite leur sens.

Angles complémentaires

Les relations dans les triangles rectangles, ainsi que la figure qui suit donnent la relation qui lie sinus et cosinus des angles complémentaires.



On a donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha), \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha).}$$

Valeurs particulières

A l'aide des identités que nous venons de démontrer, on peut toujours se ramener à un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Certains angles sont fréquemment utilisés. Voici les valeurs des nombres trigonométriques correspondants.

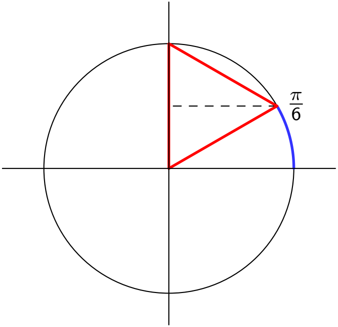
Proposition

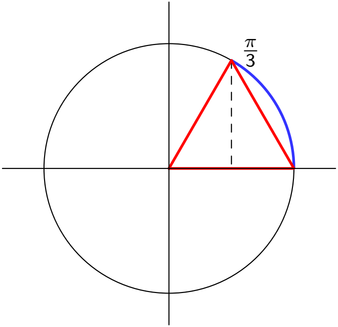
On a le tableau de valeurs suivant.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{cotg}(\alpha)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Il est utile de les retenir par coeur.
- Cependant, on peut toujours les retrouver en traçant le cercle trigonométrique, comme indiqué ci-après.

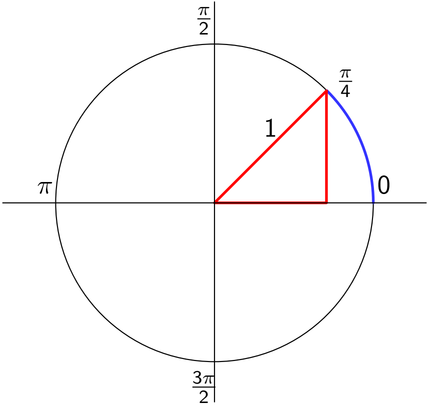
- Les valeurs en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ découlent directement de la définition.
- Les valeurs du cosinus et du sinus en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ se correspondent via la proposition précédente. Elle peuvent être déterminées en utilisant des triangles équilatéraux.





- Vu que les hauteurs d'un triangle équilatéral sont aussi ses médianes, on obtient directement $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et par la relation fondamentale $\cos^2(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Puisque $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0$, on voit qu'il vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- On peut faire de même pour les valeurs en $\frac{\pi}{3}$ bien que ce ne soit pas nécessaire.

Enfin pour les valeurs correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$, on utilise triangle isocèle, et on utilise la relation fondamentale :



On a en effet

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}),$$

et

$$\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

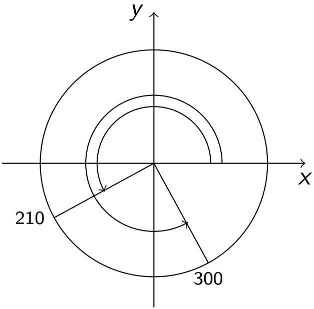
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercice 13 3,5

Transformer en degrés les nombres (radians), $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{3}$ et placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Solution :

1. π correspond à 180 degrés, et $\frac{\pi}{6}$ à 30 degrés (retenir par coeur), donc $\frac{7\pi}{6}$ correspond à 210 degrés=180+30 degrés
2. de même $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60 degrés, et $\frac{5\pi}{3}$, à 300 degrés= 270+30 degrés

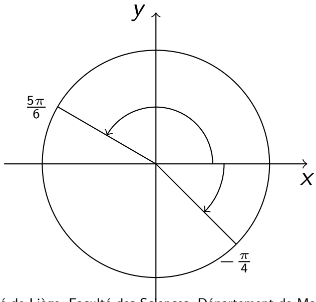


Exercice 14 2,5

Transformer en radians les amplitudes 150° et -45°;et placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Solution :

1. 180 degrés correspondent à π radians, donc 1 degré correspond à $\frac{\pi}{180}$ radians, et 150 degrés correspodent à $\frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ radians.
2. On peut aller plus vite si on sait que 30° correspondent à $\frac{\pi}{6}$ radians. Alors 150° correspondent à $\frac{5\pi}{6}$ radians
3. On retient par coeur que 45° correspond à $\frac{\pi}{4}$ donc -45° correspond à $-\frac{\pi}{4}$ radians



Exercices résolus

Dans tous les cas, il est utile de dessiner le cercle trigonométrique.

Ex. 15.1 Evaluer $\cos(\frac{7\pi}{6})$. C'est $\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

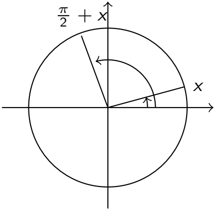
Ex. 15.4 Evaluer $\mathrm{tg}\,(\frac{7\pi}{4})$. C'est $\mathrm{tg}\,(\pi + \frac{3\pi}{4}) = \mathrm{tg}\,(\frac{3\pi}{4}) = -\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4})$=-1.

Ex. 16.1 Evaluer $\sin(-60°)$. C'est $-\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ex. 20 Parmi les propositions suivantes, une seule est égale à $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, laquelle ?

1. $\cos(x)$
2. $\sin(x)$
3. $-\cos(x)$
4. $-\sin(x)$

On fait un dessin et on le voit :



On peut aussi utiliser la formule d'addition (chapitre suivant) :

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(x).$$

Exercices résolus

Ex. 19 Soit x tel que $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ et $\sin(x) = 0,8$. Que vaut $\cos(x)$?

(1) On a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 0,36$.
(2) Donc $\cos(x) = 0,6$ ou $\cos(x) = -0,6$.
(3) Mais $\cos(x)$ est négatif.

Ex. 24 Un triangle ABC rectangle en A est tel que le côté $[A, B]$ mesure 5m et que l'angle $\widehat{ABC}$ soit égal à $30°$. Déterminer l'aire du triangle ABC, ainsi que la norme de $\overrightarrow{BC}$.

(1) On fait un dessin. On indique ce que l'on a (et éventuellement ce que l'on cherche).
(2) La longueur de $[A; C]$ est $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ mètres.
(3) L'aire vaut $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ mètres carrés et la norme de $\overrightarrow{BC}$ vaut $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ mètres.

Faire l'exercice 16

Exercices 19 et 20

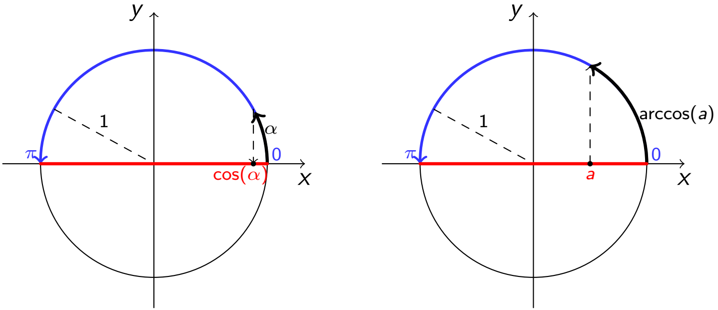
19. Un observateur placé au bord d'une rivière voit un arbre placé sur la rive opposée sous un angle de 60 degrés. S'il s'éloigne de 40 m, l'angle n'est plus que de 30 degrés. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

1. Faire un dessin.
2. Il y a deux triangles rectangles.
3. Il y a aussi un trianglesisocèle, qui permet de déterminer des angles.
4. On trouve $20\sqrt{3}$ mètres.

L'arc cosinus

Definition

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\text{arccos}(a)$.



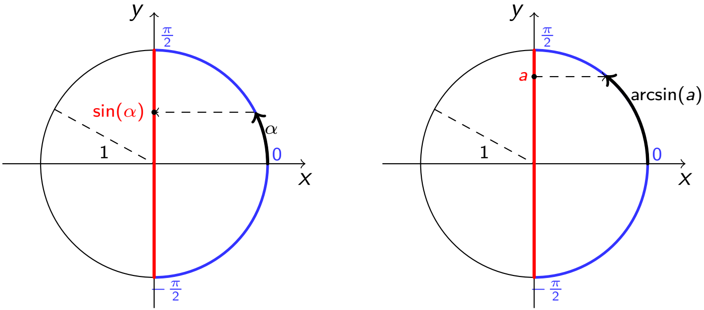
L'arc cosinus jouit des propriétés suivantes.

- On a $\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$;

L'arc sinus

Definition

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arcsin(a)$.



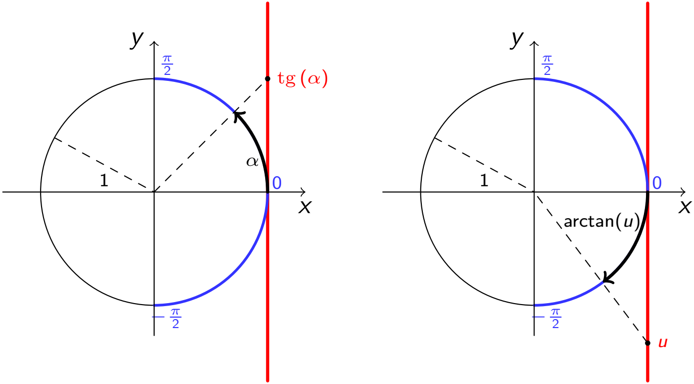
La fonction arc sinus a les propriétés suivantes.

- On a $\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

L'arc tangente

Definition

Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\mathrm{tg}\,(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\mathrm{arctg}(a)$.



Equations trigonométriques

Proposition

L'équation $\cos(\alpha) = a$ *admet les solutions suivantes :*
Si $a \notin [-1, 1]$, *il n'y a pas de solution. Si* $a \in [-1, 1]$, *on a les solutions :*

$$\alpha = \arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \textit{ou} \quad \alpha = -\arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Proposition

L'équation $\sin(\alpha) = a$ *admet les solutions suivantes :*
Si $a \notin [-1, 1]$, *il n'y a pas de solution. Si* $a \in [-1, 1]$, *on a les solutions :*

$$\alpha = \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \textit{ou} \quad \alpha = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Proposition

L'équation $\mathrm{tg}\,(\alpha) = a$ *admet les solutions suivantes :*

$$\alpha = \mathrm{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \textit{ou} \quad \alpha = \pi + \mathrm{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$