Mathématique

Trigonométrie, produit scalaire produit vectoriel

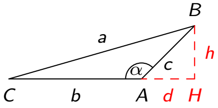
Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Trigonométrie dans les triangles quelconques

Considérons le triangle suivant :



Peut-on connaître a en fonction de b et c ? Non, cela dépend de α.
Peut-on connaître a en fonction de b, c et α ? Oui, (cas d'isométrie).

Théorème d'Al Kashi, Pythagore généralisé, règle des cosinus

Avec les notations ci-dessus, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Preuve : On a (si l'angle en A est obtus) :

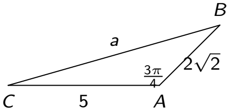
- $a^2 = h^2 + (b+d)^2 = h^2 + b^2 + d^2 + 2bd$ (CBH rectangle en H)
- $c^2 = h^2 + d^2$ (ABH rectangle en H)
- $d = c\cos(\pi - \alpha) = -c\cos(\alpha)$.
- La preuve s'adapte si l'angle en A est aigu.

Quelques remarques, un exemple

Remarques :

- Cette relation est valable pour les trois côtés. Ecrire les deux autres !
- Comment retenir : on écrit Pythagore, puis le “double produit”.

Exemple : Déterminer la valeur de a dans la situation suivante.



On a

$$a^2 = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2.5.(2\sqrt{2})\cos(\frac{3\pi}{4})$$
$$= 25 + 8 + 20 = 53.$$

Donc $a = \sqrt{53}$.

Ecriture en termes de normes :

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos(\alpha).$$

A ben tien, cela ressemble à un double produit !

Exercices résolus

Ex. 1 Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

1. Faire un schéma, même approximatif
2. Ecrire le thm d'Al Kashi: $\sqrt{28}$.
3. Nous verrons qu'on peut utiliser une autre méthode.

Ex. 2 Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut 60°. Déterminer $\|\overrightarrow{BC}\|$.

(1) Faire un schéma sommaire.

(2) $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\frac{\pi}{3}) = 13.$

(3) La réponse est $\sqrt{13}$.

Ex. 6 Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont données (en mètres par exemple) par $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{13}$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.

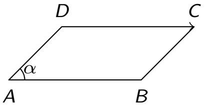
(1) Faire un schéma, indiquer ce que l'on a et ce que l'on cherche.

(2) On a $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\frac{\pi}{3})$, donc $13 = 9 + 16 - 2.3.4\cos(\widehat{BAC})$.

(3) Donc on cherche un angle dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{\pi}{3}$.

Norme d'une somme

Voici une situation classique en physique :



Que vaut $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$?
On calcule le carré de la norme :

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi - \alpha) \\
&= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\alpha) \\
&= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

Le terme correcteur se comporte comme un double produit...
Que vaut la norme de $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$?...

Produit scalaire de vecteurs

Définition

Le produit scalaire des vecteurs (libres) non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\cos(\alpha)$$

où $\alpha \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est le nombre 0.

- L'angle non orienté de deux vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et obtenu en liant ces vecteurs en un point O. On obtient deux demi-droites et donc deux angles non orientés. Par définition, l'angle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le plus petit des deux. Il est entre 0 et 180 degrés. On fait de même pour définir l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
- **Attention :** ne pas confondre avec la multiplication scalaire d'un vecteur par un nombre.
- La définition vaut pour des vecteurs du plan ou pour des vecteurs dans l'espace, elle se lit dans les deux sens et le cosinus est bien défini pour un angle non orienté.

Conséquences de la définition

Proposition

Des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition

L'opération $\bullet$ est symétrique : on a $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$ pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

Proposition

Pour tout vecteur (libre) $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$, donc $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|$

Réécriture du théorème d'Al Kashi :

$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \bullet (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Réécriture du calcul de la diagonale du parallélogramme

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) \bullet (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}.$$

Bases orthonormées

Définition

Une base de vecteurs est orthonormée si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. En particulier

- Une base orthonormée du plan est un couple de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ satisfaisant

$$\overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_1} = 1 \quad \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 \quad \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_2} = 1.$$

- Une base orthonormée de l'espace est un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ satisfaisant

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_1} = 1 & \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_3} = 0 \\ \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_2} = 1 & \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_3} = 0 \\ \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_1} = 0 & \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_3} = 1. \end{array}$$

Les vecteurs de norme 1 sont aussi appelés *vecteurs unitaires*.

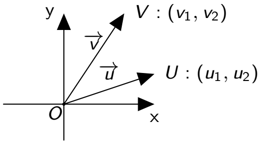
Expression du produit scalaire dans une B.O. du plan

Proposition

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ont pour composantes (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan, alors

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Preuve :



On calcule avec le thm d'Al Kashi : $|\overrightarrow{UV}|^2 = |\overrightarrow{OU}|^2 + |\overrightarrow{OV}|^2 - 2\overrightarrow{OU} \bullet \overrightarrow{OV}$.
Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU} \bullet \overrightarrow{OV} &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OU}|^2 + |\overrightarrow{OV}|^2 - |\overrightarrow{UV}|^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - [(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2]\}. \end{aligned}$$

Expression du produit scalaire dans une B.O. de l'espace

Proposition

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace ont pour composantes (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_2) dans une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de l'espace, alors

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Preuve : La même qu'avant. Une composante en plus.

Propriétés du produit scalaire

Proposition

1. *Le produit scalaire est symétrique;*
2. *Le produit scalaire est bilinéaire (distributif) : on a*
   - $(\vec{u}+\vec{v})\bullet\vec{w} = \vec{u}\bullet\vec{w}+\vec{v}\bullet\vec{w}$ *et* $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$,
   - $(\lambda\vec{u})\bullet\vec{v} = \lambda(\vec{u}\bullet\vec{v}) = \vec{u}\bullet(\lambda\vec{v})$

   pour tous vecteurs libres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre réel λ.
   En conséquence, on a
   - $(r\vec{u}+s\vec{v})\bullet\vec{w} = r(\vec{u}\bullet\vec{w})+s(\vec{v}\bullet\vec{w})$, *et*
   - $\vec{u}\bullet(r\vec{v}+s\vec{w}) = r(\vec{u}\bullet\vec{v})+s(\vec{u}\bullet\vec{w})$,

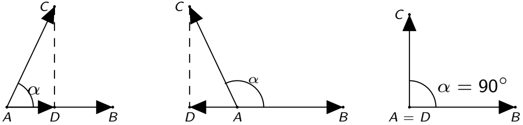
   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels r et s.
3. *Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}\bullet\vec{u}\geqslant 0$ et $\vec{u}\bullet\vec{u}=0$ ssi $\vec{u}=\vec{0}$.*

Preuve : On utilise la formule, avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned}\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) &= u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2) = u_1v_1+u_2v_2+u_1w_1+u_2w_2\\ &= \vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}.\end{aligned}$$

Applications : Al Kashi projection orthogonale

1. Plus besoin de retenir Al Kashi, il suffit de distribuer (voir S6).
2. Dans les situations suivantes, $\overrightarrow{AD}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$:



Proposition

Dans tous les cas ci-dessus, on a $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$.

Preuve : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DC}$.

Exercices résolus I

Ex. 13.1 Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

(1) Formule : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 2.3.\cos(\frac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$.

Ex. 15 Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnés dans cette base par

1) $\overrightarrow{u} : (1, 3)$, $\overrightarrow{v} : (2, -1)$; Expression dans une B.O : $1.2 + 3(-1) = -1$.
4) $\overrightarrow{u} : (3, 4)$, $\overrightarrow{v} : (-4, 3)$; Même formule : $3.(-4) + 4.3 = 0$.

Remarque : Calculer la norme de $\overrightarrow{u}$, celle de $\overrightarrow{v}$ et l'angle entre les vecteurs.

Ex. 16 Soit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan, et le vecteur $\overrightarrow{u} : (2, -1)$. Déterminer les conditions pour qu'un vecteur $\overrightarrow{v} : (x, y)$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Généraliser à $\overrightarrow{u} : (a, b) \neq 0$.

(1) On exprime $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.
(2) On obtient $2x - y = 0$. Les solutions sont $\{(x; 2x) : x \in \mathbb{R}\}$.
(3) Ce sont tous les multiples de $v_0 : (1; 2)$.
(4) Si $\overrightarrow{u} : (a; b)$, alors $\overrightarrow{v}$ ets multiples de $(-b; a)$.

Exercices résolus II

Ex. 14.1 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 1$. Calculer $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.

1. Le produit scalaire est distributif et symétrique. Donc on a à calculer $2\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}$
2. De plus $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|u\|^2 = 4, \ldots$
3. La réponse est $8 - 9 - 1 = -2$

Dans les mêmes conditions, calculer $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$.

Ex. 18 Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont appliquées à un objet A. Elles ont respectivement une intensité de $5N$ et $10N$ et forment entre elles un angle de 60 degrés ($\frac{\pi}{3}$). Quelle est l'intensité de la résultante $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$?

(1) On cherche $\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\|$

(2) On développe le carré :

$$\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\|^2 = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) \bullet (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = \|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 + 2\overrightarrow{F_1} \bullet \overrightarrow{F_2}.$$

(3) On a $\overrightarrow{F_1} \bullet \overrightarrow{F_2} = \|\overrightarrow{F_1}\| \|\overrightarrow{F_2}\| \cos(\frac{\pi}{3}) = 25$.

(4) On prend la racine carrée. Donc $\sqrt{175}N$.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Composantes de vecteurs dans une base orthonormée

Proposition (Décomposition d'un vecteur)

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base orthonormée du plan. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans cette base en $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$. Alors

$$u_1 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_1} \quad u_2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_2}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}.$$

De même, si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de l'espace, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ se décompose dans cette base en

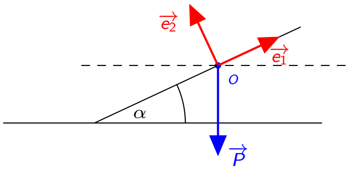
$$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{e_3})\overrightarrow{e_3}.$$

Preuve :

- Dans le plan, on écrit $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$, et on calcule $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{e_2}$.
- On fait de même dans l'espace avec les trois vecteurs de la base.

Exemple (Exercice 17)

On se place dans la situation physique représentée par le schéma suivant et on veut décomposer $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:



(1) On calcule $\overrightarrow{P} \bullet \overrightarrow{e_1} = |\overrightarrow{P}||\overrightarrow{e_1}|\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -|\overrightarrow{P}|\sin(\alpha)$;

(2) On calcule $\overrightarrow{P} \bullet \overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{P}||\overrightarrow{e_2}|\cos(\pi + \alpha) = -|\overrightarrow{P}|\cos(\alpha)$;

(3) On applique la formule :

$$\overrightarrow{P} = -|\overrightarrow{P}|\sin(\alpha)\overrightarrow{e_1} - |\overrightarrow{P}|\cos(\alpha)\overrightarrow{e_2}.$$

On peut aussi utiliser des angles orientés, mais il faut tourner dans le bon sens !

Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite

Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur libre et d une droite.

Définition

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ se décompose de manière unique en $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_d + \overrightarrow{v}^\perp$ où $\overrightarrow{v}_d$ est nul ou un vecteur directeur de d et où $\overrightarrow{v}^\perp$ est orthogonal à d. Le vecteur $\overrightarrow{v}_d$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur d.

On calcule facilement la projection d'un vecteur sur une droite, à l'aide du produit scalaire.

Proposition

Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur (libre) et $\overrightarrow{e}$ un vecteur directeur normé de d. La projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur d est

$$\overrightarrow{v}_d = (\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{e})\overrightarrow{e}.$$

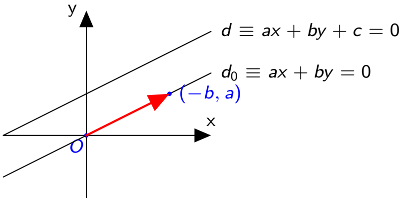
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d, alor la projection de $\overrightarrow{v}$ sur d est

$$\overrightarrow{v}_d = \frac{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}.$$

Droites et perpendicularité I

Rappel : dans tout repère cartésien du plan, si d est une droite, alors

$$d \equiv ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$



Dans ce cas, d admet pour vecteur directeur $(-b, a)$.

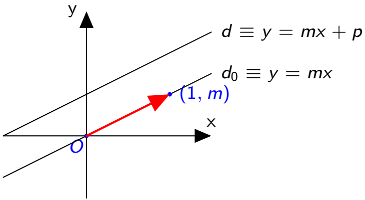
Proposition

Dans un repère orthonormé, si $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$, alors

1. le vecteur $\overrightarrow{n} : (a, b)$ est orthogonal à d;
2. les droites d et d' sont orthogonales ssi $a\,a' + b\,b' = 0$;
3. les droites d et d' sont parallèles ssi $a\,b' - b\,a' = 0$, c'est à dire si (a, b) et (a', b') sont multiples l'un de l'autre.

Droites et perpendicularité II

Cas particulier : si $d \equiv y = mx + p$



Dans ce cas, d admet pour vecteur directeur $(1, m)$

Proposition

Dans un repère orthonormé, si $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$, alors

1. le vecteur $\overrightarrow{n} : (m, -1)$ est orthogonal à d;
2. les droites d et d' sont orthogonales ssi $m\,m' = -1$;
3. les droites d et d' sont parallèles ssi $m = m'$;
4. le nombre m, coefficient angulaire ou pente de d, est la tangente de l'angle orienté entre le premier vecteur de la base associée au repère et un vecteur directeur de d.

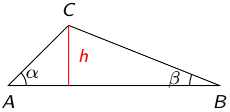
Relation des sinus

Proposition

Soit ABC un triangle. On a la relation suivante :

$$\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\overline{AC}} = \frac{\sin(\widehat{CAB})}{\overline{CB}} = \frac{\sin(\widehat{BCA})}{\overline{AB}}.$$

Preuve :



On a $h = \overline{AC}\sin(\alpha) = \overline{BC}\sin(\beta)$.
On fait de même avec les autres hauteurs, même si le triangle est acutangle.
Pour retenir : On écrit le sinus d'un angle sur le côté opposé, trois fois.
Utilité : Cacluler des angles et des longueurs.

Formules d'addition

Proposition

Pour tous nombres réels α et β, on a

1. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
4. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Preuve : La formule (2) vient du thm d'Al Kashi, les autres s'en déduisent.

- Il suffit de retenir une formule, car les autres s'en déduisent (mais on peut retenir les quatre si on a une bonne mémoire).
- Pour avoir par exemple la deuxième à partir de la première, on y remplace β par $-\beta$;
- Pour avoir la troisième, on écrit $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta))$;
- On retient "cosinus d'une somme :cos cos -sin sin";
- Si on hésite sur le signe, on prend un exemple simple comme $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

Formules de duplication, et de Carnot

On applique les formules d'addition pour $\alpha = \beta$ et on obtient

Proposition

Pour tous nombres réels α, on a

1. $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
2. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

En utilisant la formule de duplication pour le cosinus et la formule fondamentale ($cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$), on obtient les formules de Carnot :

Proposition

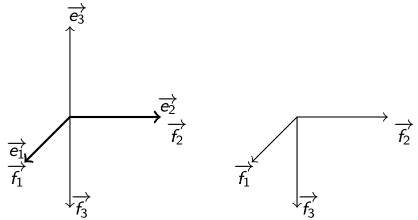
Pour tous nombres réel α, on a

1. $2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)$
2. $2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Bases orthonormées positives et négatives de l'espace

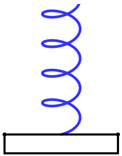
- Considérons les bases orthonormés suivantes de l'espace.

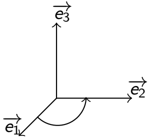


- Si on "déplace" la deuxième, pour "appliquer" $\overrightarrow{f_1}$ sur $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sur $\overrightarrow{e_2}$, alors $\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{f_3}$ sont opposés.
- Toute base orthonormée peut alors être "appliquée sur l'une des deux par un déplacement.
- En sciences, la première base est dite *droite* et l'autre *gauche*. En mathématiques, on dit que ces bases n'ont pas la même *orientation*. *Orienter* l'espace, c'est choisir un de ces types de bases, et décider que ce sont les bases *positives*.

Orientation et tire bouchon

Voici un tire-bouchon (pour droitiers) et une base. Si on visse pour rabattre $\overrightarrow{e_1}$ sur $\overrightarrow{e_2}$ (par le plus court chemin), le tire-bouchon va vers “le haut”, dans le sens de $\overrightarrow{e_3}$: la base est droite.





La notion d’orientation est valable pour des bases quelconques : deux bases ont la même orientation si elles peuvent être déformées continûment l’une sur l’autre, en gardant une base à chaque instant.

Produit vectoriel de vecteurs dans l'espace

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres de l'espace.

Definition

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, est le vecteur libre défini par le conditions suivantes :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont multiples l'un de l'autre, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- Dans le cas contraire :
  1. La direction de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (ou au plan vectoriel déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$);
  2. La norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a donc
  $$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin(\theta),$$
  où θ est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  3. Son sens est tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit une base positive.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés de l'opération "produit vectoriel"

1. Le produit vectoriel est antisymétrique : on a
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u},$$
pour tous vecteurs libres $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
2. Le produit vectoriel est bilinéaire (distributif) : on a
   - $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$,
   - $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$

   pour tous vecteurs libres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre λ.
3. En général, on a
   - $(r\vec{u} + s\vec{v}) \wedge \vec{w} = r(\vec{u} \wedge \vec{w}) + s(\vec{v} \wedge \vec{w})$, et
   - $\vec{u} \wedge (r\vec{v} + s\vec{w}) = r(\vec{u} \wedge \vec{v}) + s(\vec{u} \wedge \vec{w})$,

   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels r et s.

Composantes de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans une base orthonormée positive

Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base othonormée positive de l'espace, on a

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2} \\
\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}.
\end{array}}$$

En utilisant la linéarité du produit vectoriel par rapport à ses deux arguments, on a

Proposition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour composantes respectives (u_1, u_1, u_2) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée positive alors

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} : (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_2), u_1 v_2 - u_2 v_1).}$$

Produits vectoriels et déterminants

On peut exprimer la règle de calcul précédente à l'aide de matrices.

Définition

Une matrice de type (p, q) $(p, q \in \mathbb{N}^*)$ est un tableau rectangulaire de nombres réels ayant p lignes et q colonnes.

Type $(2,2)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Type $(2,3)$: $\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$ Type $(1,3)$: $\begin{pmatrix} k & l & m \end{pmatrix} \ldots,$

où $a, \ldots, m$ sont réels.

Définition

Le *déterminant* d'une matrice de type $(2,2)$ est défini par

$$\det \begin{pmatrix} a; & b; \\ c; & d; \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$$

Calcul par déterminants

- On donne les vecteurs dans un base orthonormée positive $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2, v_3)$.
- On forme une matrice dont on cache une colonne à la fois.

$$\begin{pmatrix} u_1; & u_2; & u_3; \\ & & \\ v_1; & v_2; & v_3; \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} : \quad \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right)$$

- 99% des erreurs viennent du signe $-$ que l'on oublie facilement;
- On vérifie que le résultat obtenu est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.