Mathématique

Fonctions, définitions élémentaires, premières fonctions usuelles

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Buts et contenus de ce cours

- Donner un sens raisonnable à la définition

Définition

Une fonction f de A dans B est une loi qui à tout x associe $f(x)$.

Parce qu'en fait, là elle est un peu circulaire.

- On passera par la notion de relation, plus générale et plus simple.
- On passera en revue les grandes constructions de fonctions (somme, produit, quotient, composées, réciproque)
- On reverra très rapidement les propriétés classiques (parité, périodicité, croissance, extrema)
- On passera en revue les fonctions de référence classiques (premier et second degré, circulaires, racines, exponentielles, logarithmes).

Une notion de fonction en sciences

En sciences

- Les fonctions sont utilisées pour exprimer des dépendances entre des "variables". Pour faire court, disons que ces variables sont des quantités mesurables (la taille, le poids, la pression, la température,...)
  Exemple : soit X la variable "heure de la journée", et Y la variable "température". La variable Y s'exprime *en fonction* de X : à chaque mesure de l'heure correspond une seule mesure de la température (toutes choses étant égales par ailleurs). On peut faire de même avec la température d'ébulition de l'eau à des altitudes différentes.
- On dit alors que X est la variable "indépendante" et Y la variable "dépendante".
- On écrira une équation $Y = f(X)$ ou $Y = Y(X)$.

En mathématique,

- Il n'y a que des nombres et des ensembles de nombres.
- On considère alors une relation qui précise tous les couples de mesures (temps observé, température observée) ou (altitude observée, temp. observée) possibles. On n'écrit pas toujours une équation.
- Cela rejoint ce qu'on fait en sciences quand on construit une fonction en faisant des expériences.

Produit cartésien d'ensembles

Nous avosn déjà rencontré des produits cartésiens. Mais voici la définition exacte.

Définition

Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien des ensembles A et B l'ensemble $A \times B := \{(a, b) | a \in A,\ b \in B\}$.

C'est donc simplement l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le deuxième dans B. Voici des exemples

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$, on a
$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$
- Si on pose $A = \{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}$ et $B = \{\text{bleu}, \text{noir}, \text{vert}, \text{rien}, \text{rose}\}$, alors
$$A \times B = \{(\text{lundi}, \text{bleu}), (\text{lundi}, \text{noir}), (\text{lundi}, \text{vert}), (\text{lundi}, \text{rien}), (\text{mardi}, \text{bleu}), \ldots\},$$
et cet ensemble contient les 28 couples possibles.
- Si $A = B = \mathbb{R}$, alors $A \times B = \mathbb{R}^2$. De même $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Relations : définitions

Exemple : Une relation de l'ensemble des jours dans celui des couleurs :

$$\{(\text{lundi}, \text{bleu}), (\text{lundi}, \text{noir}), (\text{lundi}, \text{vert}), (\text{mardi}, \text{noir}), (\text{mercredi}, \text{vert}), \\ (\text{mercredi}, \text{bleu}), (\text{jeudi}, \text{vert}), (\text{vendredi}, \text{noir}), (\text{dimanche}, \text{rien})\}.$$

Exemple : La relation "est plus petit que" de $A = \{2; 5; 8; 11\}$ dans $B = \{3; 4; 7; 9\}$ est

$$\{(2; 3); (2; 4); (2; 7); (2; 9); (5; 7); (5; 9); (8; 9)\}$$

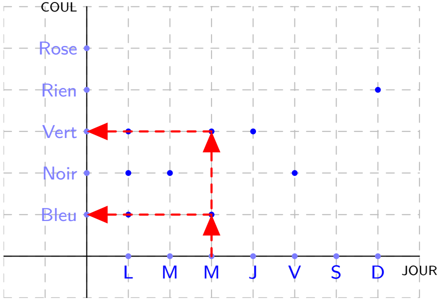
Définition

Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est une partie de $A \times B$. On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$. Si le couple (a, b) est dans $\mathcal{R}$, on note $a\mathcal{R}b$ et on dit que a est en relation avec b. On a donc

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B | a\mathcal{R}b\}.$$

Représentation cartésienne

On peut représenter les couples comme en géométrie, c'est la représentation *cartésienne* :



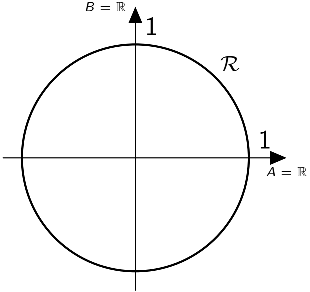
Remarques

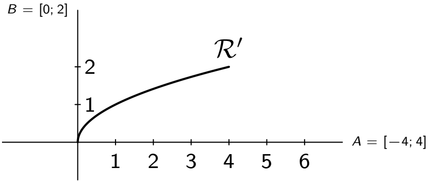
- Les axes ne sont pas gradués : ils ne portent pas des nombres.
- On lit le graphique de $A = JOUR$ vers $B = COUL$, comme ceci.
- La couleur des chaussettes n'est pas déterminée en fonction du jour !

D'autres exemples

- Soit $\mathcal{R}$ la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$
- Soit la relation $\mathcal{R}'$ définie de $A = [-4, 4]$ dans $B = [0, 2]$ par
$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow y^2 - x = 0.$$

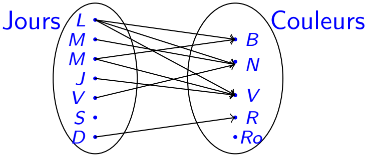
Elle se représentent visiblement par





Représentation sagittale, domaine, image

On dessine une flèche de a vers b si $a\mathcal{R}b$:



Utilité : Essetiellement conceptuelle, c'est une représentation !

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation de A dans B.

- Le *domaine* de $\mathcal{R}$ l'ensemble des points x de A qui sont en relation avec au moins un élément y de B. On le note $\mathrm{dom}_\mathcal{R}$ ou $D_\mathcal{R}$. On a

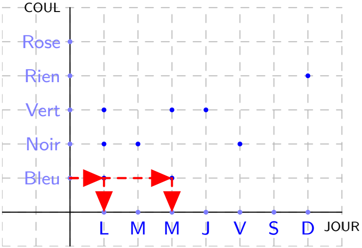
$$\mathrm{dom}_\mathcal{R} = D_\mathcal{R} = \{x \in A | \exists y \in B : x\mathcal{R}y\}.$$

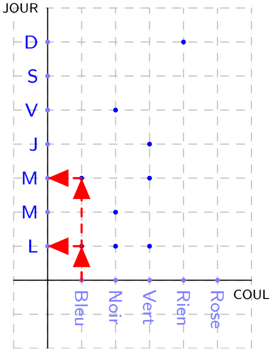
- L'*image* de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ des points y de B tels qu'il existe au moins un élément x de A qui soit en relation avec y. On a

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{y \in B | \exists x \in A : x\mathcal{R}y\}.$$

Relation réciproque

Toute relation de A dans B définit automatiquement une relation de B dans A : si à chaque jour, on associe des couleurs, alors à chaque couleur, on associe des jours :

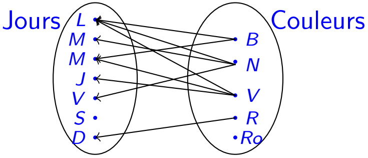




Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La définition, enfin

Pour la repréentation sagitale, on retourne les flèches :



Définition

La relation réciproque (ou inverse) est la relation $\mathcal{R}^{-1}$ de B dans A définie par

$$(a; b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (b; a) \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Remarques :

- Echanger les axes revient à effectuer une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$;
- On a directement $\mathrm{dom}_{\mathcal{R}^{-1}} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}$ et $\mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$.

Fonctions I

Dans ce qui suit, les ensembles A et B considérés seront inclus dans $\mathbb{R}$. Les fonctions de A dans B correspondent à des relations particulières.

Définition

Soient A et B deux ensembles.

- Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est le *graphe d'une fonction f*, si pour tout x dans A, il existe *au plus* un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$.
- Si x est dans $\mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$, il existe alors *exactement* un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$; on note alors y par $f(x)$ et on dit que y est *l'image* de x par f.
- On note aussi $\mathcal{R} = G_f$;
- On définit $D_f = \mathrm{dom}_f = \mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$ et on a

$$G_f = \mathcal{R} = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{dom}_f\}.$$

Remarque : On peut dire qu'une telle relation transforme x en $f(x)$. On a donc récupéré la première définition, même s'il n'y a pas toujours une "loi de transformation", avec une "suite d'opérations" à faire pour obtenir $f(x)$ à partir de x.

Fonctions II

- Si on a une fonction “loi de transformation” au sens de cette définition :

Définition

Une fonction de A dans B est une loi qui a tout élément x de A associe (au plus) un élément $f(x)$ de B.

on peut définir une relation par

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

C’est le graphe de f, qui est une relation, au sens de la définition du slide précédent. On note alors

$$f : A \to B : x \mapsto f(x),$$

pour spécifier que f est une fonction de A dans B, qui à tout $x \in A$ associe $f(x)$.

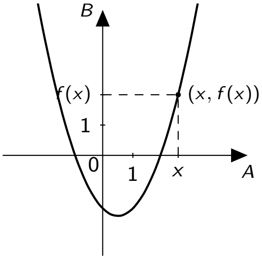
- Quel que soit le point de vue, quand on écrit $f(x)$, x est un nombre, $f(x)$ est un nombre, et la fonction est f.
- D’ailleurs, on peut remplacer x et y par n’importe quelle lettre.

Représentations graphiques

- Quel que soit le point de vue utilisé pour définir une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, son graphe est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

- C'est une relation, que l'on peut représenter comme plus haut.
- On obtient ainsi la représentation graphique de f, que l'on appelle encore *le graphique* de f.



Constructions de fonctions I

Définition (Egalité)

Deux fonctions f et g sont égales si **elles ont même domaine et** si on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Exemple : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ne sont pas égales, f prolonge g.

Définition (Restriction)

Si $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ est une fonction et si $A' \subset A$, alors la restriction de f à A' est donnée par $f|_{A'} : A' \to B : x \mapsto f(x)$.

La fonction $f|_{A'}$ est donc la même "loi de transformation" que f, mais définie sur un ensemble plus petit.

Définition (Somme et produit)

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ ont pour domaine $\mathrm{dom}_f \cap \mathrm{dom}_g$.
- On définit $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$.
- On définit le produit $f\,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\,g(x)$.
- En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, la fonction $c\,f$ a pour domaine dom_f et est définie par $c\,f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$.

Constructions de fonctions II

Définition (Composée)

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la composée de f et g (f après g) a pour domaine $\mathrm{dom}_{f\circ g} = \mathrm{dom}_g \cap \{x : g(x) \in \mathrm{dom}_f\}$ et est donnée par

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

La condition sur le domaine de $f \circ g$ est claire si on considère que l'on transforme x au moyen de g, puis le résultat au moyen de f.
Exemple : La fonction

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{y}$$

admet $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme domaine. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors $i \circ g : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est définie sur $\mathrm{dom}_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
Comment les repérer : $f(g(x))$ se lit f **de** g de x, par exemple $h(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\,(3x)}$. Attention à $\mathrm{tg}^2(3x)$.

Parité

Définition

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f.$$

Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, -y) \in G_f.$$

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 3$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

Périodicité

Les fonctions périodiques correspondent aux phénomènes qui se répètent à intervalle régulier.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique de période* T (où $T > 0$) si

$$f(x + T) = f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition

Si f est une fonction périodique, on appelle *période* de f le plus petit nombre T tel que f soit périodique de période T (s'il existe).

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$,

Exercices 1 et 3

Soit f une fonction dont le domaine est $[0,2]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de $f \circ g$?

Solution :

(1) La condition est $x^2 \in \mathrm{dom}_f = [0;2]$
(2) On a donc $x^2 \geqslant 0$ et $x^2 \leqslant 2$
(3) On résout l'inéquation.
(4) Solution : $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Soient les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Solution :

(1) $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$
(2) $\mathrm{dom}_g = [0; +\infty[$
(3) $\mathrm{dom}_{g \circ f} = \{x : \cos(x) \geqslant 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
(4) $\mathrm{dom}_{f \circ g} = [0; +\infty[$.

Exercices résolus

La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \cos(x^4) + x^2$ est-elle paire, impaire ou aucun des deux ?

Solution : Aucun des deux, attention aux détails.

Déterminer le domaine de $f(x) = \mathrm{arcos}(x^2 - 8)$

Solution :

(1) Le domaine de la fonction arccos est $[-1; 1]$
(2) La condition est donc $-1 \leqslant x^2 - 8 \leqslant 1$
(3) On résout séparément les deux inéquations
(4) On trouve $[-3; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; 3]$
(5) On peut vérifier en prenant des valeurs.

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(3 - x^2))$?

1) $]-\infty; \sqrt{2}[$ 2) $]-\infty; \sqrt{3}[$ 3) $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ 4) $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

Solution :

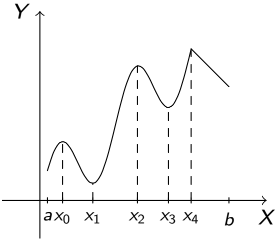
(1) Les conditions sont $3 - x^2 > 0$ et $\ln(3 - x^2) > 0$.
(2) On résout donc $3 - x^2 > 1$, ou $x^2 - 2 < 0$.

Croissance, décroissance

Définition 3.1.9 p.47

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.

1. f est (strictement) croissante sur A si
$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x)(<) \leqslant f(y).$$
2. f est (strictement) décroissante sur $A \subset \mathbb{R}$ si
$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x)(>) \geqslant f(y).$$



Cette fonction est croissante sur $[a, x_0]$, $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ elle est décroissante sur $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_4, b]$.

Extrema

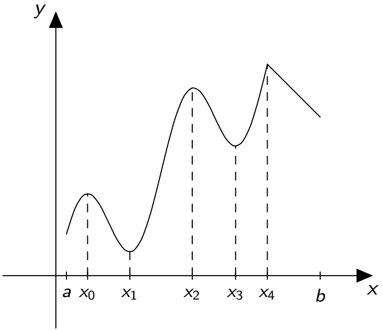
Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors

1. f admet un maximum global (strict) en x_0 si on a $f(x) \leqslant (<) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$;
2. f admet un minimum global (strict) en x_0 si on a $f(x) \geqslant (>) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$;
3. f admet un extremum global en x_0 si elle admet un minimum global ou un maximum global en x_0.
4. f admet un maximum local (strict) en x_0 si il existe un intervalle ouvert I tel qu'on a $f(x) \leqslant (<) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f \cap I$;
5. f admet un minimum local (strict) en x_0 si si il existe un intervalle ouvert I tel qu'on a on a $f(x) \geqslant (>) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f \cap I$;
6. f admet un extremum local en x_0 si elle admet un minimum local ou un maximum local en x_0;

Extrema et représentations graphiques

Voici la représentation graphique d'une fonction définie sur un $[a, b]$:



- La fonction admet des extrema locaux en $a, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, b$;
- La fonction admet des minima locaux en a, x_1, x_3, b;
- La fonction admet des maxima locaux en x_0, x_2, x_4;
- La fonction admet un maximum global (strict) en x_4;
- La fonction admet un minimum global (strict) en x_1.

Fonctions du premier degré

On appelle fonction du premier degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + p,$$

où m et p sont réels (on suppose $m \neq 0$, mais ce n'est pas obligatoire).

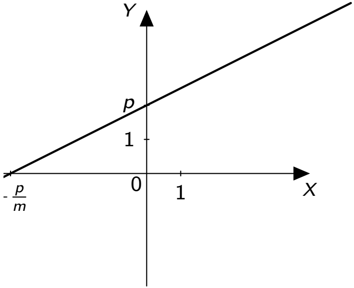
- Cette fonction a un domaine égal à $\mathbb{R}$.
- Sa représentation graphique est une droite, d'équation $y = mx + p$.
- Le nombre p est $f(0)$. On l'appelle donc ordonnée à l'origine.
- Le nombre m est la pente ou le taux d'accroissement. On a en effet pour $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

  $$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1) \text{ donc } m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

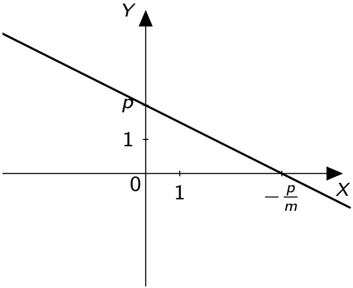
- Cette fonction est croissante si $m > 0$ et décroissante si $m < 0$. Elle est constante si $m = 0$.

Représentation graphique

- La représentation graphique est donnée par une droite de pente m.



$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, pour tout x



$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, pour tout x

- Une telle fonction est déterminée par ses valeurs en deux points distincts : voir les équations de droites passant par deux points.
- Elle ne change de signe que si elle s'annule.
- Etude du signe : voir les inéquations.

Fonctions du second degré

On appelle fonction du second degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont réels (on suppose $a \neq 0$, sinon on est ramené au cas précédent).

- Cette fonction a un domaine égal à $\mathbb{R}$.
- Sa représentation graphique est une parabole.
- Le nombre c est $f(0)$.
- On a

  $$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}],$$

  pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Donc f est une translatée de g donnée par $g(x) = ax^2$. Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

Extremum et signe

- Donc fonction f admet un extremum global strict en $x_e = -\frac{b}{2a}$. C'est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.
- De plus, on a $f(x_e) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.
- L'équation $f(x) = 0$ est une équation du second degré à une inconnue. Nous l'avons déjà traitée.
- Si cette équation admet deux solutions x_0 et x_1, éventuellement confondues, alors on a

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1).$$

- Cela permet d'étudier le signe de $f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ce signe est le signe de a quand $x \notin [x_0, x_1]$.

Exercices 11 et 12

Ex. 11 $\boxed{\text{Déterminer l'unique fonction du premier degré } f \text{ t.q. } f(1) = 3 \text{ et } f(5) = 11.}$

Solution :

(1) C'est le même problème que trouver une équation de la droite qui passe par deux points $(1;3)$ et $(5;11)$.

(2) faire un schéma, éventuellement.

(3) On peut écrire $f(x) = mx + p$, et imposer les deux conditions $3 = f(1) = m + p$ et $11 = f(5) = 5m + p$, on trouve $m = 2$ et $p = 1$.

(4) On vérifie que $f(x) = 2x + 1$ répond à la question.

(5) On peut aussi appliquer la formule pour m : $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}$.

Ex. 12 $\boxed{\text{Déterminer la fonction du premier deg. } g \text{ t.q. } g(2) = 3 \text{ et de pente } -3.}$

Solution :

(1) On a $g(x) = mx + p$, et $m = -3$, donc $g(x) = -3x + p$.

(2) On impose l'autre condition : $3 = -6 + p$, donc $p = 9$.

Exercices 17 et 43

Ex. 17 Déterminer en quel point la fonction du second degré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ admet un extremum. S'agit-il d'un max. ou d'un min. ?

Solution :

(1) La fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet son extremum en $x_e = -\frac{b}{2a}$ (si on ne se souvient plus, on peut annuler la dérivée).

(2) Ici c'est donc en $\frac{5}{2}$

(3) C'est un min car $a > 0$ (penser à x^2).

Ex. 43 Voir notes

Solution : On a $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout x. Le graphique donne $f(0) = f(6) = -2$, on a aussi $f(3) = 1$, et l'axe de symétrie est en $x = 3$. Donc

$$\begin{cases} c & = & -2 \\ 36a + 6b + c & = & -2 \\ 9a + 3b + c & = & 1 \end{cases}$$

De plus, on peut remplacer une des cond. par $-\frac{b}{2a} = 3$. On résout le système : $a = -\frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = -2$. Donc $f(-2) = -\frac{22}{3}$.

Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

- La fonction puissance entière de degré $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0$ est définie

$$P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ facteurs}} .$$

- Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. C'est un produit de fonctions plus simples.
- En multipliant ces fonctions par des nombres et en les additionnant on obtient des *fonctions polynomiales*.

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$

- Cette dermière fonction est dite de degré n si $c_n \neq 0$, et $\mathrm{dom}_P = \mathbb{R}$.
- En utilisant le produit, la fonction

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et les fonctions polynomiales, on obtient les fractions rationnelles :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{c_n x^n + \cdots + c_0}{a_m x^m + \cdots + a_0},$$

dont le domaine est $\{x \in \mathbb{R} : a_m x^m + \cdots + a_0 \neq 0\}$.

La fonction sinus

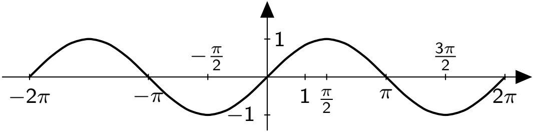


Figure: La représentation graphique de la fonction sin (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

- La fonction sin est périodique, de période 2π;
- Elle est impaire;
- Son image est $[-1, 1]$.

La fonction fonction cosinus

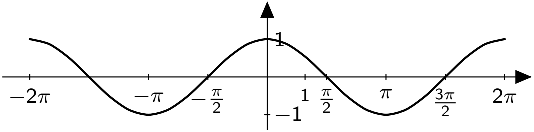


Figure: La représentation graphique de la fonction cos (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

- La fonction cos est périodique, de période 2π;
- Elle est paire;
- Son image est $[-1, 1]$.

La fonction tangente

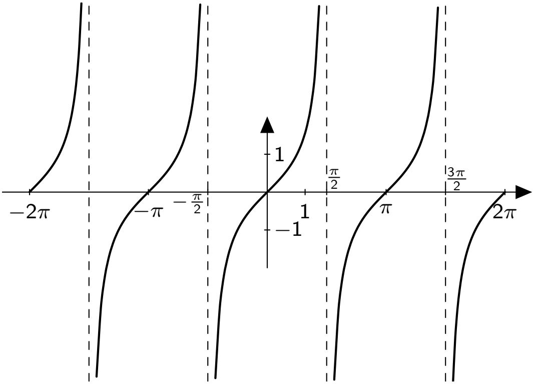


Figure: La représentation graphique de la fonction tg (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

La fonction cotangente

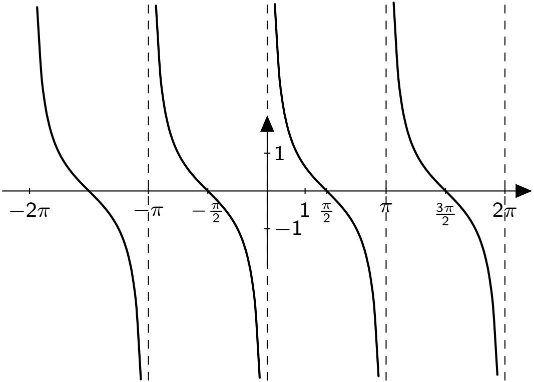


Figure: La représentation graphique de la fonction cotg (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

Fonctions réciproques (ou inverses)

- Etant donnée une fonction $f : A \to B$, on sait qu'il s'agit d'une relation particulière de A dans B.
- On sait que cette relation admet toujours une relation réciproque.
- Cette relation réciproque n'est pas toujours le graphe d'une fonction :
  - La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ admet une relation réciproque qui n'est pas le graphe d'une fonction.
  - La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ admet une relation réciproque qui est le graphe d'une fonction.

Définition

Une fonction $f : A \to B$ est injective si $a \neq a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

- Alors $f : A \to B$ est injective si $\forall a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
- Cela a un intérêt pour résoudre des équations : $x^3 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$.
- C'est équivalent à ce que l'équation $b = f(a)$ admette au plus une solution, quel que soit $b \in B$.

Fonctions réciproques

Proposition

La relation réciproque du graphe de f est le graphe d'une fonction si, et seulement si, la fonction f est injective.

- Dans ce cas, la fonction ainsi définie est la réciproque de f, notée f^{-1}.
- Si de plus le domaine de f est A et son image B, on dit que f est une bijection et le domaine de f^{-1} est B.
  Dans ce cas, on a donc $b = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.
- Comment trouver la réciproque ?
  On résout l'équation $b = f(a)$ par rapport à a. On trouve une solution, et c'est $f^{-1}(b)$.
- Exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{x+2}$.

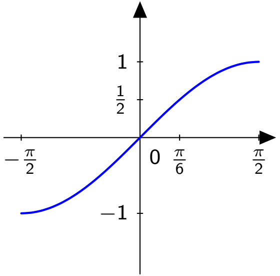
Fonction arc sinus

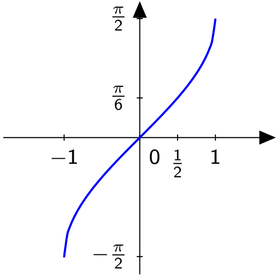
La fonction sin n'est pas une bijection. Mais la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur son image $[-1, 1]$.

Définition

La fonction arcsin (arc sinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sa représentation graphique s'obtient à partir de celle de sin :





Représentation de sin, sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Représentation de $\arcsin$, sur $[-1, 1]$

On a déjà vu les propriétés de la fonction arc sinus.

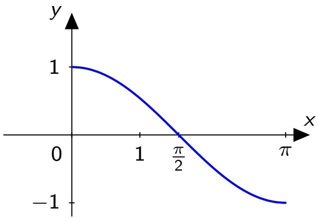
Fonction arc cosinus

La fonction cos n'est pas une bijection. Mais la restriction de cos à $[0, \pi]$ définit une bijection de $[0, \pi]$ sur son image $[-1, 1]$.

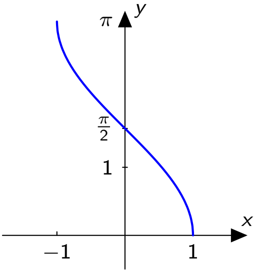
Définition

La fonction $\arccos$ (arc cosinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$.

La représentation graphique est obtenue à partie de celle de cos. On a déjà vu les propriétés de $\arccos$.



Représentation de cos, sur $[0, \pi]$



Représentation de $\arccos$, sur $[-1, 1]$

Fonction arc tangente

La fonction tangente est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction tangente est strictement croissante et définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

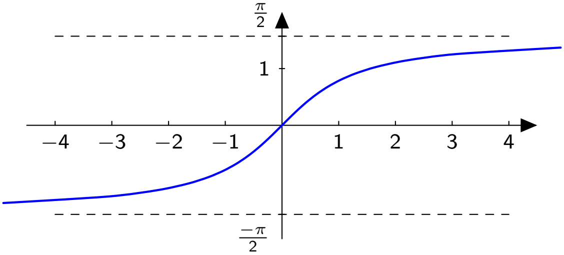
Définition

La fonction arctg (arc tangente) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- On a $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg} x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- On a $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction arctg est croissante.

Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction arctg est obtenue à partir de celle de tg.



La fonction racine carrée

Définition

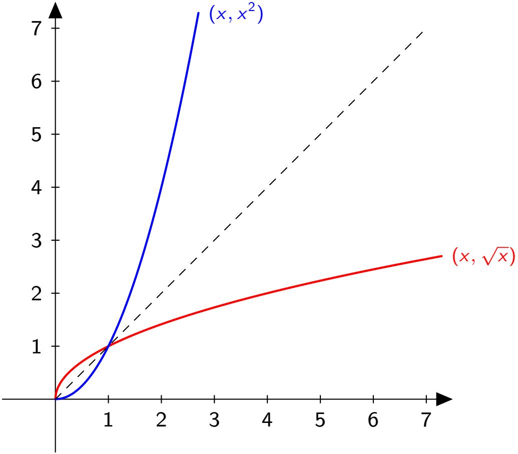
La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine carrée

$$f^{-1} = \sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}.$$

- On a $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout $x \geqslant 0$.
- L'expression $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vaut $|x|$.

Représentations graphiques

On a les représentations graphiques suivantes :



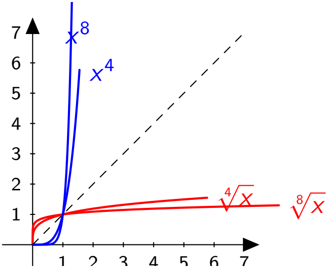
Racines p-èmes , p pair

Définition

Pour tout p entier pair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction réciproque est la fonction racine p-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur $[0, +\infty[$.



1. L'expression $\sqrt[4]{x^4}$ est définie pour $x < 0$, mais ce n'est pas x !
2. L'expression $(\sqrt[4]{x})^4$ n'est défini que pour $x \in [0, +\infty[$, et c'est x.
3. En fait les fonctions qui à x asocient x^p et $\sqrt[p]{x}$ respectivement ne sont inverses l'une de l'autre que sur $[0, +\infty[$.

La racine cubique

Définition

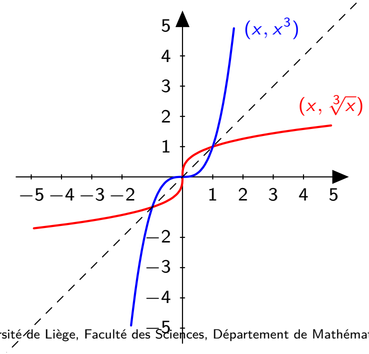
La fonction

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine cubique

$$f_3^{-1} = \sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.



Racines p-èmes, p impair

Définition

Pour tout p entier impair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est la fonction racine p-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.