

Mathématique

Fonctions, définitions élémentaires, premières fonctions usuelles

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Une notion de fonction en sciences

En sciences

- Les fonctions sont utilisées pour exprimer des dépendances entre des “variables”. Pour faire court, disons que ces variables sont des **quantités mesurables** (la taille, le poids, la pression, la température,...)
Exemple : soit X la variable “heure de la journée”, et Y la variable “température”. La variable Y s'exprime *en fonction* de X : à **chaque mesure** de l'heure correspond **une seule mesure** de la température (toutes choses étant égales par ailleurs). On peut faire de même avec la température d'ébullition de l'eau à des altitudes différentes.
- On dit alors que X est la variable “indépendante” et Y la variable “dépendante”.
- On écrira une équation $Y = f(X)$ ou $Y = Y(X)$.

En mathématique,

- Il n'y a que des nombres et des ensembles de nombres.
- On considère alors une **relation** qui précise tous les **couples de mesures** (**temps observé, température observée**) ou (**altitude observée, temp. observée**) possibles. On **n'écrit pas toujours** une équation.
- Cela rejoint ce qu'on fait en sciences quand on construit une fonction en faisant des expériences.

3

Buts et contenus de ce cours

- Donner un sens raisonnable à la définition

Définition

Une fonction f de A dans B est une loi qui à tout x associe $f(x)$.

Parce qu'en fait, là elle est un peu circulaire.

- On passera par la notion de relation, plus générale **et** plus simple.
- On passera en revue les grandes constructions de fonctions (somme, produit, quotient, composées, réciproque)
- On reverra très rapidement les propriétés classiques (parité, périodicité, croissance, extrema)
- On passera en revue les fonctions de référence classiques (premier et second degré, circulaires, racines, exponentielles, logarithmes).

2

Produit cartésien d'ensembles

Nous avons déjà rencontré des produits cartésiens. Mais voici la définition exacte.

Définition

Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien des ensembles A et B l'ensemble $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

C'est donc simplement l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le deuxième dans B . Voici des exemples

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$, on a

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

- Si on pose $A = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$ et $B = \{\text{bleu, noir, vert, rien, rose}\}$, alors
 $A \times B = \{(\text{lundi, bleu}), (\text{lundi, noir}), (\text{lundi, vert}), (\text{lundi, rien}), (\text{mardi, bleu}), \dots\}$,
et cet ensemble contient les 28 couples possibles.
- Si $A = B = \mathbb{R}$, alors $A \times B = \mathbb{R}^2$. De même $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

4

Relations : définitions

Exemple : Une relation de l'ensemble des jours dans celui des couleurs :

$\{(lundi, bleu), (lundi, noir), (lundi, vert), (mardi, noir), (mercredi, vert), (mercredi, bleu), (jeudi, vert), (vendredi, noir), (dimanche, rien)\}$.

Exemple : La relation "est plus petit que" de $A = \{2; 5; 8; 11\}$ dans $B = \{3; 4; 7; 9\}$ est

$\{(2; 3); (2; 4); (2; 7); (2; 9); (5; 7); (5; 9); (8; 9)\}$

Définition

Une relation \mathcal{R} de A dans B est une partie de $A \times B$. On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de \mathcal{R} . Si le couple (a, b) est dans \mathcal{R} , on note $a\mathcal{R}b$ et on dit que a est en relation avec b . On a donc

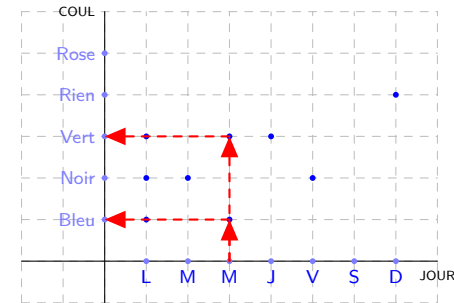
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid a\mathcal{R}b\}.$$

5

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation cartésienne

On peut représenter les couples comme en géométrie, c'est la représentation *cartésienne* :



Remarques

- Les axes ne sont pas gradués : ils ne portent pas des nombres.
- On lit le graphique de $A = JOUR$ vers $B = COUL$, comme ceci.
- La couleur des chaussettes n'est **pas** déterminée en fonction du jour !

6

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

D'autres exemples

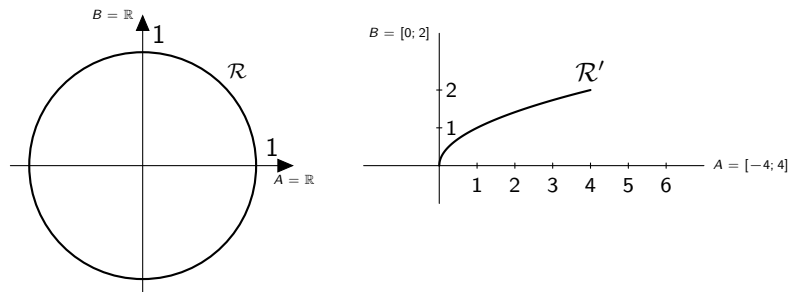
- Soit \mathcal{R} la relation de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

- Soit la relation \mathcal{R}' définie de $A = [-4, 4]$ dans $B = [0, 2]$ par

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow y^2 - x = 0.$$

Elle se représentent visiblement par

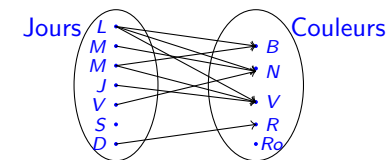


7

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation sagittale, domaine, image

On dessine une flèche de a vers b si $a\mathcal{R}b$:



Utilité : Essentiellement conceptuelle, c'est une représentation !

Définition

Soit \mathcal{R} une relation de A dans B .

- Le *domaine* de \mathcal{R} l'ensemble des points x de A qui sont en relation avec au moins un élément y de B . On le note $\text{dom}_{\mathcal{R}}$ ou $D_{\mathcal{R}}$. On a

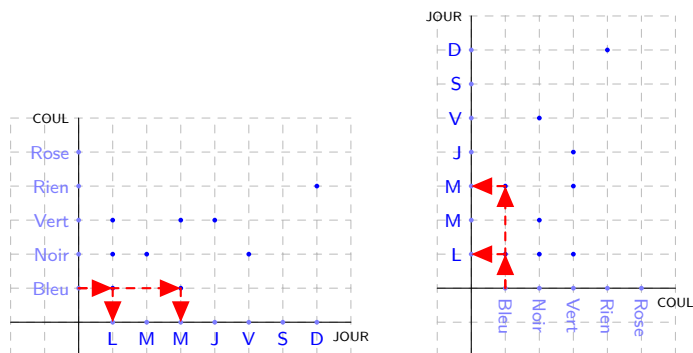
$$\text{dom}_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid \exists y \in B : x\mathcal{R}y\}.$$

- L'*image* de \mathcal{R} l'ensemble $\text{Im}(\mathcal{R})$ des points y de B tels qu'il existe au moins un élément x de A qui soit en relation avec y . On a

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \{y \in B \mid \exists x \in A : x\mathcal{R}y\}.$$

Relation réciproque

Toute relation de A dans B définit automatiquement une relation de B dans A : si à chaque jour, on associe des couleurs, alors à chaque couleur, on associe des jours :

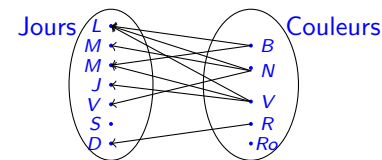


9

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La définition, enfin

Pour la représentation sagittale, on retourne les flèches :



Définition

La relation **réciproque** (ou inverse) est la relation \mathcal{R}^{-1} de B dans A définie par

$$(a; b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (b; a) \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Remarques :

- Echanger les axes revient à effectuer une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$;
- On a directement $\text{dom}_{\mathcal{R}^{-1}} = \text{Im}(\mathcal{R})$ et $\text{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{dom}_{\mathcal{R}}$.

10

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions I

Dans ce qui suit, les ensembles A et B considérés seront inclus dans \mathbb{R} . Les fonctions de A dans B correspondent à des relations particulières.

Définition

Soient A et B deux ensembles.

- Une relation \mathcal{R} de A dans B est le **graphe d'une fonction** f , si pour tout x dans A , il existe **au plus** un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$.
- Si x est dans $\text{dom}_{\mathcal{R}}$, il existe alors **exactement** un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$; on note alors y par $f(x)$ et on dit que y est *l'image* de x par f .
- On note aussi $\mathcal{R} = G_f$;
- On définit $D_f = \text{dom}_f = \text{dom}_{\mathcal{R}}$ et on a

$$G_f = \mathcal{R} = \{(x, f(x)) : x \in \text{dom}_f\}.$$

Remarque : On peut dire qu'une telle relation **transforme** x en $f(x)$. On a donc récupéré la première définition, même s'il n'y a pas toujours une "loi de transformation", avec une "suite d'opérations" à faire pour obtenir $f(x)$ à partir de x .

11

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions II

- Si on a une fonction "loi de transformation" au sens de cette définition :

Définition

Une fonction de A dans B est une loi qui à tout élément x de A associe (au plus) un élément $f(x)$ de B .

on peut définir une relation par

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

C'est le **graphe** de f , qui est une relation, au sens de la définition du slide précédent. On note alors

$$f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x),$$

pour spécifier que f est une fonction de A dans B , qui à tout $x \in A$ associe $f(x)$.

- Quel que soit le point de vue, quand on écrit $f(x)$, **x est un nombre, $f(x)$ est un nombre, et la fonction est f .**
- D'ailleurs, on peut remplacer x et y par n'importe quelle lettre.

12

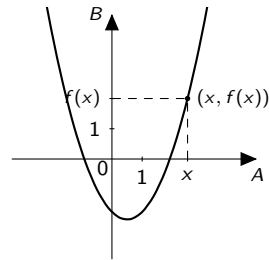
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentations graphiques

- Quel que soit le point de vue utilisé pour définir une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , son graphe est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

- C'est une relation, que l'on peut représenter comme plus haut.
- On obtient ainsi la **représentation graphique** de f , que l'on appelle encore **le graphique** de f .



13

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Constructions de fonctions I

Définition (Égalité)

Deux fonctions f et g sont égales si **elles ont même domaine** et si on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \text{dom}(f)$.

Exemple : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, ne sont pas égales, f prolonge g .

Définition (Restriction)

Si $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ est une fonction et si $A' \subset A$, alors la restriction de f à A' est donnée par $f|_{A'} : A' \rightarrow B : x \mapsto f(x)$.

La fonction $f|_{A'}$ est donc la même "loi de transformation" que f , mais définie sur un ensemble plus petit.

Définition (Somme et produit)

Soient f et g des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ ont pour domaine $\text{dom}_f \cap \text{dom}_g$.
- On définit $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$.
- On définit le produit $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)g(x)$.
- En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, la fonction cf a pour domaine dom_f et est définie par $cf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$.

Constructions de fonctions II

Définition (Composée)

Soient f et g des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la composée de f et g (f après g) a pour domaine $\text{dom}_{f \circ g} = \text{dom}_g \cap \{x : g(x) \in \text{dom}_f\}$ et est donnée par

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

La condition sur le domaine de $f \circ g$ est claire si on considère que l'on transforme x au moyen de g , puis le résultat au moyen de f .

Exemple : La fonction

$$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{y}$$

admet $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme domaine. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors $i \circ g : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est définie sur $\text{dom}_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.

Comment les repérer : $f(g(x))$ se lit f de g de x , par exemple $h(x) = \sqrt{\text{tg}(3x)}$. Attention à $\text{tg}^2(3x)$.

15

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parité

Définition

- 1 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si son **domaine** est **symétrique** par rapport à zéro et si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \text{dom}_f$.
- 2 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si son **domaine** est **symétrique** par rapport à zéro et si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \text{dom}_f$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f.$$

Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, -y) \in G_f.$$

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 3$ et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

16

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Périodicité

Les fonctions périodiques correspondent aux phénomènes qui se répètent à intervalle régulier.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur \mathbb{R} est *périodique de période* T (où $T > 0$) si

$$f(x + T) = f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition

Si f est une fonction périodique, on appelle *période* de f le plus petit nombre T tel que f soit périodique de période T (s'il existe).

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$,

17

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices résolus

La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \cos(x^4) + x^2$ est-elle paire, impaire ou aucun des deux ?

Solution : Aucun des deux, attention aux détails.

Déterminer le domaine de $f(x) = \arccos(x^2 - 8)$

Solution :

- (1) Le domaine de la fonction arccos est $[-1; 1]$
- (2) La condition est donc $-1 \leq x^2 - 8 \leq 1$
- (3) On résout séparément les deux inéquations
- (4) On trouve $[-3; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; 3]$
- (5) On peut vérifier en prenant des valeurs.

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(3 - x^2))$?

- 1) $] -\infty; \sqrt{2}[$ 2) $] -\infty; \sqrt{3}[$ 3) $] -\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ 4) $] -\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

Solution :

- (1) Les conditions sont $3 - x^2 > 0$ et $\ln(3 - x^2) > 0$.
- (2) On résout donc $3 - x^2 > 1$, ou $x^2 - 2 < 0$.

19

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 1 et 3

Soit f une fonction dont le domaine est $[0, 2]$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de $f \circ g$?

Solution :

- (1) La condition est $x^2 \in \text{dom}_f = [0; 2]$
- (2) On a donc $x^2 \geq 0$ et $x^2 \leq 2$
- (3) On résout l'inéquation.
- (4) Solution : $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Soient les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f , g , $g \circ f$ et $f \circ g$.

Solution :

- (1) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$
- (2) $\text{dom}_g = [0; +\infty[$
- (3) $\text{dom}_{g \circ f} = \{x : \cos(x) \geq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- (4) $\text{dom}_{f \circ g} = [0; +\infty[$.

18

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Croissance, décroissance

Définition 3.1.9 p.47

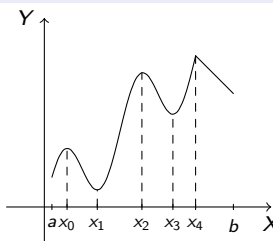
Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et A une partie de \mathbb{R} .

- ① f est (**strictement**) croissante sur A si

$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x) (<) \leq f(y).$$

- ② f est (**strictement**) décroissante sur $A \subset \mathbb{R}$ si

$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x) (>) \geq f(y).$$



Cette fonction est croissante sur $[a, x_0]$, $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$
elle est décroissante sur $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_4, b]$.

20

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Extrema

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors

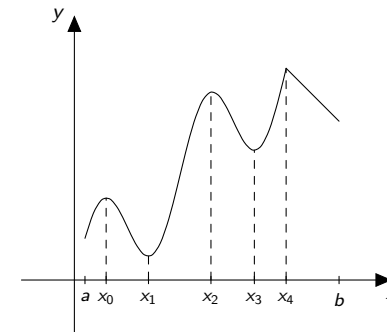
- 1 f admet un **maximum global** (strict) en x_0 si on a $f(x) \leq (<)f(x_0)$ pour tout $x \in \text{dom}_f$;
- 2 f admet un **minimum global** (strict) en x_0 si on a $f(x) \geq (>)f(x_0)$ pour tout $x \in \text{dom}_f$;
- 3 f admet un **extremum global** en x_0 si elle admet un minimum global ou un maximum global en x_0 .
- 4 f admet un **maximum local** (strict) en x_0 si il existe un intervalle ouvert I tel qu'on a $f(x) \leq (<)f(x_0)$ pour tout $x \in \text{dom}_f \cap I$;
- 5 f admet un **minimum local** (strict) en x_0 si il existe un intervalle ouvert I tel qu'on a $f(x) \geq (>)f(x_0)$ pour tout $x \in \text{dom}_f \cap I$;
- 6 f admet un **extremum local** en x_0 si elle admet un minimum local ou un maximum local en x_0 ;

21

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Extrema et représentations graphiques

Voici la représentation graphique d'une fonction définie sur un $[a, b]$:



- La fonction admet des extrema locaux en $a, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, b$;
- La fonction admet des minima locaux en a, x_1, x_3, b ;
- La fonction admet des maxima locaux en x_0, x_2, x_4 ;
- La fonction admet un maximum global (strict) en x_2 ;
- La fonction admet un minimum global (strict) en x_1 .

22

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions du premier degré

On appelle fonction du premier degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx + p,$$

où m et p sont réels (on suppose $m \neq 0$, mais ce n'est pas obligatoire).

- Cette fonction a un **domaine égal à \mathbb{R}** .
- Sa représentation graphique est **une droite**, d'équation $y = mx + p$.
- Le nombre p est $f(0)$. On l'appelle donc **ordonnée à l'origine**.
- Le nombre m est la **pente** ou le **taux d'accroissement**. On a en effet pour $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1) \text{ donc } m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

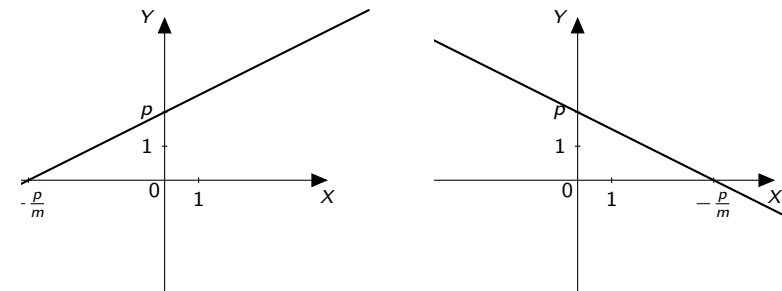
- Cette fonction est croissante si $m > 0$ et décroissante si $m < 0$. Elle est constante si $m = 0$.

23

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation graphique

- La représentation graphique est donnée par une droite de pente m .



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2, \text{ pour tout } x \quad f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \text{ pour tout } x$$

- Une telle fonction est déterminée par ses valeurs en deux points distincts : **voir les équations de droites** passant par deux points.
- Elle ne change de signe que si elle s'annule.
- Etude du signe : **voir les inéquations**.

24

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions du second degré

On appelle fonction du second degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont réels (on suppose $a \neq 0$, sinon on est ramené au cas précédent).

- Cette fonction a un **domaine égal à \mathbb{R}** .
- Sa représentation graphique est une **parabole**.
- Le nombre c est $f(0)$.
- On a

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Donc f est une translatée de g donnée par $g(x) = ax^2$. Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

25

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Extremum et signe

- Donc fonction f admet un extremum global strict en $x_e = -\frac{b}{2a}$. C'est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.
- De plus, on a $f(x_e) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
- L'équation $f(x) = 0$ est une équation du second degré à une inconnue. Nous l'avons déjà traitée.
- Si cette équation admet deux solutions x_0 et x_1 , éventuellement confondues, alors on a

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1).$$

- Cela permet d'étudier le signe de $f(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} . Ce signe est le signe de a quand $x \notin [x_0, x_1]$.

26

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 11 et 12

Ex. 11 Déterminer l'unique fonction du premier degré f t.q. $f(1) = 3$ et $f(5) = 11$.

Solution :

- (1) C'est le même problème que trouver une équation de la droite qui passe par deux points $(1; 3)$ et $(5; 11)$.
- (2) faire un schéma, éventuellement.
- (3) On peut écrire $f(x) = mx + p$, et imposer les deux conditions $3 = f(1) = m + p$ et $11 = f(5) = 5m + p$, on trouve $m = 2$ et $p = 1$.
- (4) On vérifie que $f(x) = 2x + 1$ répond à la question.
- (5) On peut aussi appliquer la formule pour $m : \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1}$.

Ex. 12 Déterminer la fonction du premier deg. g t.q. $g(2) = 3$ et de pente -3 .

Solution :

- (1) On a $g(x) = mx + p$, et $m = -3$, donc $g(x) = -3x + p$.
- (2) On impose l'autre condition : $3 = -6 + p$, donc $p = 9$.

27

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 17 et 43

Ex. 17 Déterminer en quel point la fonction du second degré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ admet un extremum. S'agit-il d'un max. ou d'un min. ?

Solution :

- (1) La fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet son extremum en $x_e = -\frac{b}{2a}$ (si on ne se souvient plus, on peut annuler la dérivée).
- (2) Ici c'est donc en $\frac{5}{2}$
- (3) C'est un min car $a > 0$ (penser à x^2).

Ex. 43 Voir notes

Solution : On a $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout x . Le graphique donne $f(0) = f(6) = -2$, on a aussi $f(3) = 1$, et l'axe de symétrie est en $x = 3$. Donc

$$\begin{cases} c & = & -2 \\ 36a + 6b + c & = & -2 \\ 9a + 3b + c & = & 1 \end{cases}$$

De plus, on peut remplacer une des cond. par $-\frac{b}{2a} = 3$. On résout le système : $a = -\frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = -2$. Donc $f(-2) = -\frac{22}{3}$.

28

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

- La fonction puissance entière de degré $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0$ est définie

$$P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \underbrace{x \cdots x}_n.$$

- Son domaine de définition est \mathbb{R} . C'est un produit de fonctions plus simples.
- En multipliant ces fonctions par des nombres et en les additionnant on obtient des *fonctions polynomiales*.

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$

- Cette dernière fonction est dite de degré n si $c_n \neq 0$, et $\text{dom}_P = \mathbb{R}$.
- En utilisant le produit, la fonction

$$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et les fonctions polynomiales, on obtient les fractions rationnelles :

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{c_n x^n + \cdots + c_0}{a_m x^m + \cdots + a_0},$$

dont le domaine est $\{x \in \mathbb{R} : a_m x^m + \cdots + a_0 \neq 0\}$.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

29

La fonction sinus

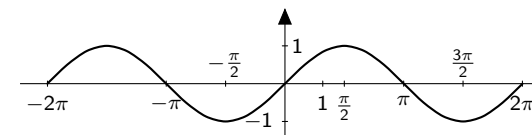


Figure: La représentation graphique de la fonction sin (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

- La fonction sin est périodique, de période 2π ;
- Elle est impaire;
- Son image est $[-1, 1]$.

30

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La fonction fonction cosinus

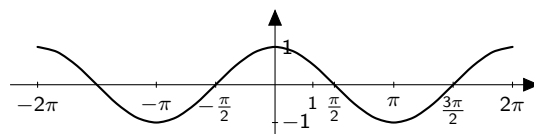


Figure: La représentation graphique de la fonction cos (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

- La fonction cos est périodique, de période 2π ;
- Elle est paire;
- Son image est $[-1, 1]$.

31

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La fonction tangente

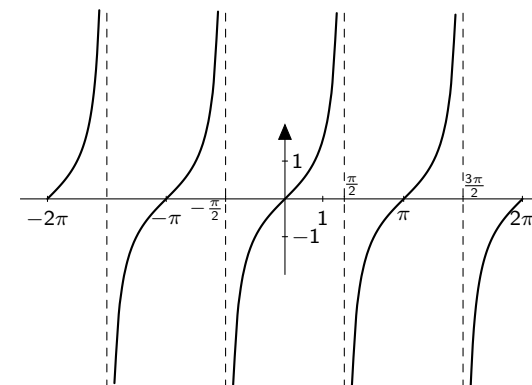


Figure: La représentation graphique de la fonction tg (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

32

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La fonction cotangente

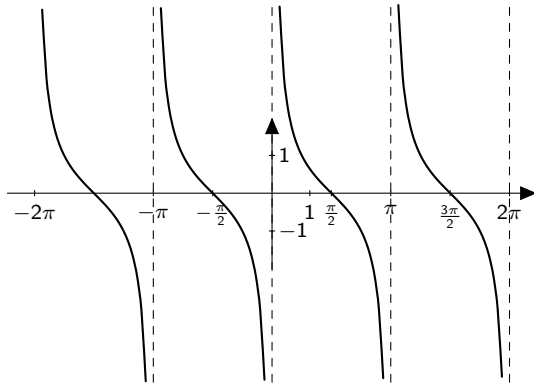


Figure: La représentation graphique de la fonction \cotg (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

33

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions réciproques (ou inverses)

- Etant donnée une fonction $f : A \rightarrow B$, on sait qu'il s'agit d'une relation particulière de A dans B .
- On sait que cette relation admet toujours une **relation** réciproque.
- Cette relation réciproque n'est pas toujours le graphe d'une fonction :
 - La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ admet une relation réciproque qui n'est pas le graphe d'une fonction.
 - La fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ admet une relation réciproque qui est le graphe d'une fonction.

Définition

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est injective si $a \neq a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

- Alors $f : A \rightarrow B$ est injective si $\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
- Cela a un intérêt pour résoudre des équations : $x^3 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$.
- C'est équivalent à ce que l'équation $b = f(a)$ admette au plus une solution, quel que soit $b \in B$.

34

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions réciproques

Proposition

La relation réciproque du graphe de f est le graphe d'une fonction si, et seulement si, la fonction f est injective.

- Dans ce cas, la fonction ainsi définie est la réciproque de f , notée f^{-1} .
- Si de plus le domaine de f est A et son image B , on dit que f est une bijection et le domaine de f^{-1} est B .
Dans ce cas, on a donc $b = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.
- Comment trouver la réciproque ?
On résout l'équation $b = f(a)$ par rapport à a . On trouve une solution, et c'est $f^{-1}(b)$.
- Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{x+2}$.

35

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

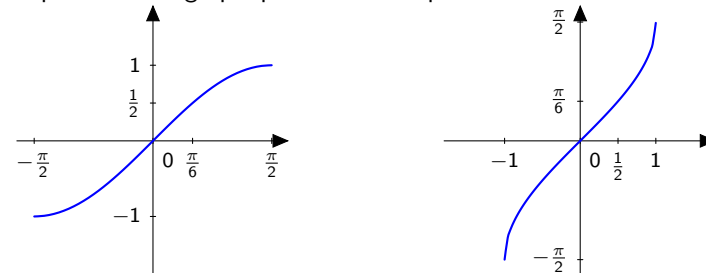
Fonction arc sinus

La fonction \sin n'est pas une bijection. Mais la restriction de \sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur son image $[-1, 1]$.

Définition

La fonction arcsin (arc sinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction \sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sa représentation graphique s'obtient à partir de celle de \sin :



36 Représentation de \sin , sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Représentation de \arcsin , sur $[-1, 1]$
On a déjà vu les propriétés de la fonction arc sinus.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

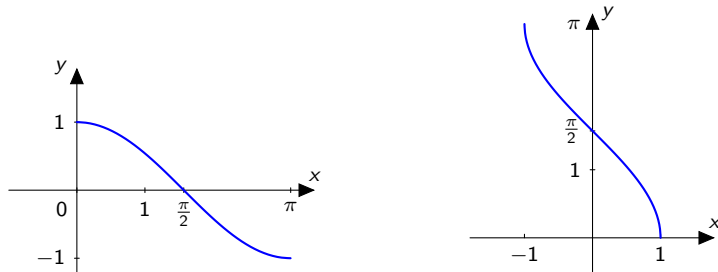
Fonction arc cosinus

La fonction \cos n'est pas une bijection. Mais la restriction de \cos à $[0, \pi]$ définit une bijection de $[0, \pi]$ sur son image $[-1, 1]$.

Définition

La fonction \arccos (arc cosinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction \cos à $[0, \pi]$.

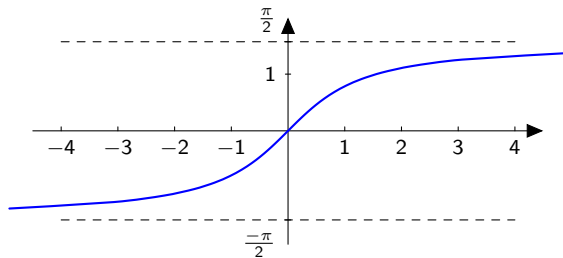
La représentation graphique est obtenue à partir de celle de \cos . On a déjà vu les propriétés de \arccos .



37 Représentation de \cos , sur $[0, \pi]$ Représentation de \arccos , sur $[-1, 1]$
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction \arctg est obtenue à partir de celle de tg .



39

Fonction arc tangente

La fonction tangente est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction tangente est strictement croissante et définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

Définition

La fonction arctg (arc tangente) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- On a $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- On a $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) = x, \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction arctg est croissante.

38

La fonction racine carrée

Définition

La fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine carrée

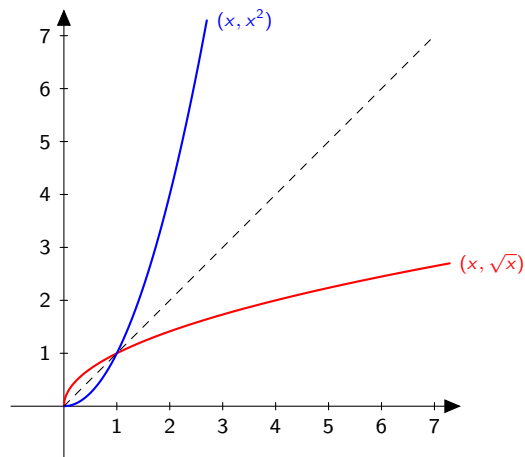
$$f^{-1} = \sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}.$$

- On a $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout $x \geq 0$.
- L'expression $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vaut $|x|$.

40

Représentations graphiques

On a les représentations graphiques suivantes :



41

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La racine cubique

Définition

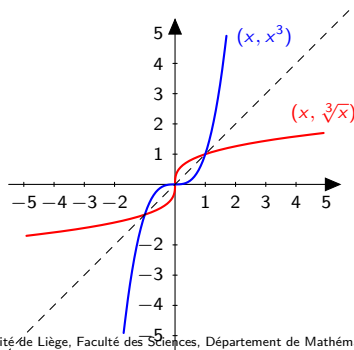
La fonction

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine cubique

$$f_3^{-1} = \sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$

Elle est définie sur \mathbb{R} .



43

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

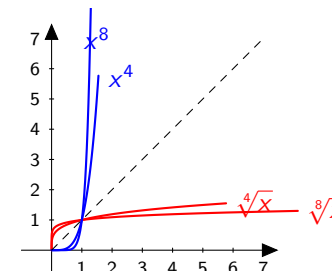
Racines p -èmes, p pair

Définition

Pour tout p entier pair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction réciproque est la fonction racine p -ème :

$$\sqrt[p]{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur $[0, +\infty[$.



- ① L'expression $\sqrt[4]{x^4}$ est définie pour $x < 0$, mais ce n'est pas x !
- ② L'expression $(\sqrt[4]{x})^4$ n'est défini que pour $x \in [0, +\infty[$, et c'est x .
- ③ En fait les fonctions qui à x associent x^p et $\sqrt[p]{x}$ respectivement ne sont inverses l'une de l'autre que sur $[0, +\infty[$.

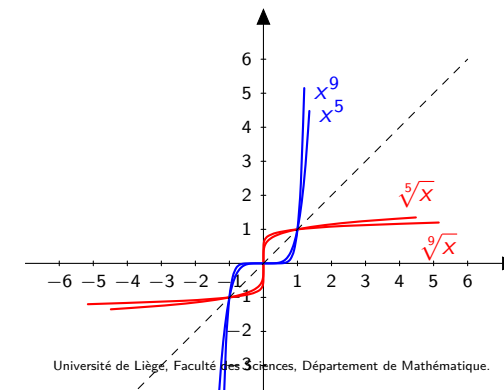
Racines p -èmes, p impair

Définition

Pour tout p entier impair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . La fonction réciproque est la fonction racine p -ème :

$$\sqrt[p]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur \mathbb{R} .



44

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.