Mathématique

Limites et continuité

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Les limites : but du jeu

- On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

- On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$: c'est la notion de limite en un point a;

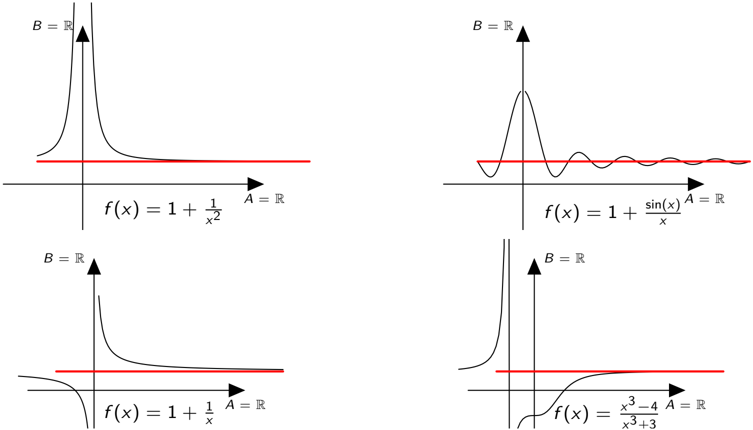
- On peut aussi étudier le comportement de f pour des valeurs arbitrairement grandes (en valeur absolue). C'est la notion de comportement asymptotique ou de limite à l'infini.

- Dans les deux cas il faut que f soit définie pour "suffisamment" de points "proches" de a ou "proches" de l'infini.

- La solution à ces deux problèmes est similaire et viendra de la maîtrise adéquate de la notion de "proximité".

Limites à l'infini, premières constatations

Voici quelques fonctions, et leur représentation. Comment qualifier le comportement des valeurs $f(x)$ quand x est "assez grand" ?



Quelques mauvaises réponses

Quelques réponses fréquentes, mais qui ne sont pas correctes :

1. Quand x est assez grand $f(x)$ vaut 1.
   - Ce n'est vrai pour aucune des fonctions.
2. Plus x devient grand, plus $f(x)$ se rapproche de 1.
   - C'est vrai pour la première fonction (à partir de $x > 0$), mais on peut aussi dire : plus x devient grand, plus $f(x)$ se rapproche de 0.
   - Ce n'est pas vrai pour la deuxième fonction.
3. Quand x est infiniment grand, $f(x)$ est infiniment proche de 1.
   - On ne sait pas définir la notion d'infiniment grand, $+\infty$ n'est pas un nombre.
   - On ne sait pas définir la notion d'infiniment proche.
4. ...

Oui mais bon, quand même, à partir d'un moment, on ne voit plus la différence entre le graphique de la fonction f et la droite d'équation $y = 1$, ou encore
pour x suffisamment grand, on ne voit plus la différence entre $f(x)$ et 1.

Résolution de l'écran de mon pc et une définition

Modifions la "résolution", en utilisant ce fichier Geogebra, où la résolution est matérialisée par le nombre ε, qui représente la "marge d'erreur" pour l'image, due à la résolution limitée.

- On voit donc que le graphique "finit par coïncider" avec la droite d'équation $y = 1$.
- Si on augmente la résolution, il faut considérer des valeurs x plus grandes, mais le phénomène se reproduit.
- Tous les points dont l'ordonnée est comprise entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ sont assimilés à 1 (par l'écran).

On dira que la limite des valeurs $f(x)$, quand x tend vers l'infini est 1 si, quelle que soit la "résolution" ε, à partir d'un certain moment (pour les x suffisamment grands), il n'y a plus de différence entre $f(x)$ et 1 (à la résolution près).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (x > M \,\text{et}\, x \in \mathrm{dom}_f) \Rightarrow f(x) \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[.$$

On notera

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

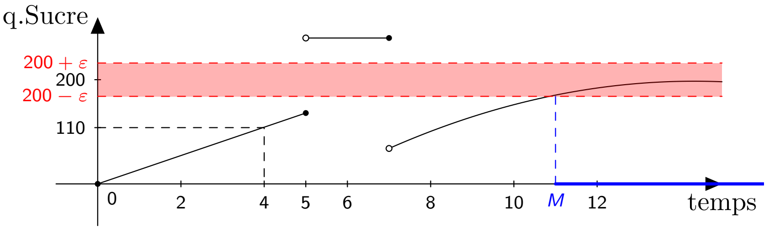
Instruments de mesure et erreurs : un phénomène universel

- Tout instrument donne une mesure avec une marge d'erreur. Celle de gauche a une marge d'erreur $\varepsilon = 2.5$ grammes. Sa capacité est limitée à N =2000g :


- Pour celle de droite, $\varepsilon = 0.01$ grammes et $N = 160g$.
- La balance de gauche indique $50g$ quand on est en réalité entre $50 - \varepsilon$ et $50 + \varepsilon$. Elle indique "$+\infty$" dès qu'on dépasse 2000g (elle n'indique plus rien).
- Celle de droite indique 0.5g quand la mesure réelle est entre $0.5g - \varepsilon$ et $0.5g + \varepsilon$, et $+\infty$ dès qu'on dépasse $160g$
- Tout écran a sa résolution propre. Il ne fait pas de différence entre des points dont la distance est trop petite.
- Il en va de même pour les microscopes, manomètres, mètres, pieds à coulisse,...

Les limites dans ma cuisine

Je verse du sucre dans ma balance de cuisine, pour atteindre 200g :



Si je prends une balance plus précise, j'ai un autre ε, mais à partir d'un instant, elle indiquera quand même 200. On écrit

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) = 200.$$

La condition est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (t > M \text{ et } t \in \mathrm{dom}_f) \Rightarrow S(t) \in]200 - \varepsilon, 200 + \varepsilon[.$$

On a aussi $\lim_{t \to 4} S(t) = 110$. Mais $\lim_{t \to 5} S(t)$ n'existe pas.

Les limites : un exemple en physique I

Les variables physiques pression p et volume V d'un gaz parfait sont inversement proportionnelles, à température et nombre de moles fixés : On a une loi en physique :

$$p\,V = n\,R\,T.$$

En mathématiques, on considérera la fonction

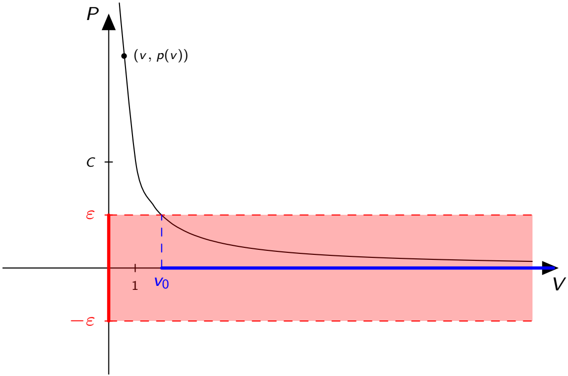
$$p : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : v \mapsto \frac{C}{v},$$

où C est une constante strictement positive ($n_0 R T_0$).

- Quel est le comportement des valeurs $p(v)$ quand les valeurs v sont arbitrairement grandes ?
- Remarque : la pression n'est jamais nulle;
- Déterminer v_0 pour que $p(v) < \frac{C}{2}$, pour tout $v > v_0$;
- Pour $\varepsilon > 0$, déterminer v_0 pour que $p(v) < \varepsilon$, pour tout $v > v_0$;
- On note $\lim_{v \to +\infty} p(v) = 0$, ou $\lim_{+\infty} p = 0$.

Représentation graphique

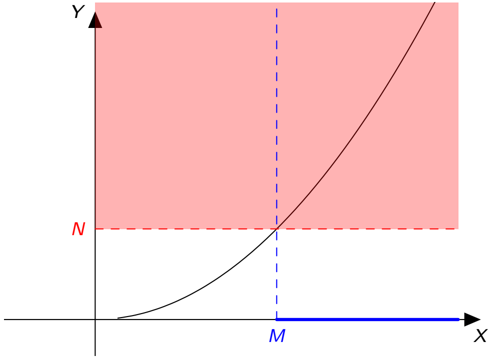
On peut garantir qu'on a une pression aussi petite que voulue (inférieure à une "marge d'erreur" $\varepsilon > 0$ arbitraire) quand le volume est suffisamment grand :



C'est un exemple de limite finie (0) en l'infini (en $+\infty$) : $\lim_{v \to +\infty} p(v) = 0$.

Limite infinie en l'infini

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$:

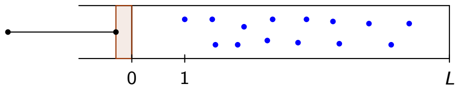


Quelle que soit la "capacité" N, à partir d'un certain "moment" M, elle est dépassée :

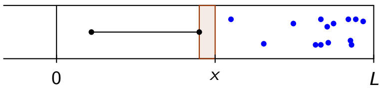
$$\forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x > M \,\text{et}\, x \in \mathrm{dom}_f) \Rightarrow f(x) > N.$$

Limites : exemple en physique II

Considérons la situation physique suivante, où on a représenté (de profil), un tube cylindrique dont la base a une surface unitaire.



On indique la position du piston à l'aide d'une graduation sur le cylindre.

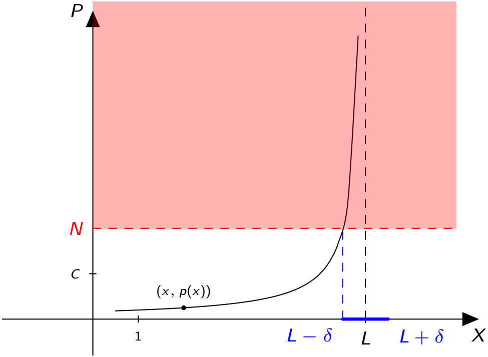


La pression est alors une fonction de la position x du piston : si on note C le produit de la pression et du volume en la position initiale, on a

$$p : [0, L[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{C}{L-x}.$$

Représentation graphique et questions

- Quel est le comportement de la pression quand x "tend vers L" ?



- Condition : $\forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : L - \delta < x < L + \delta \Rightarrow p(x) > N$.
- On note $\lim_{x \to L} p(x) = +\infty$ (ou plus rarement $\lim_L p = +\infty$).
- Il s'agit d'une limite infinie en un nombre (L).

Limite finie en un nombre a : une définition

Définition

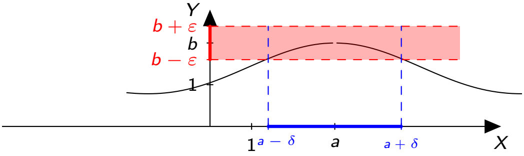
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à dom_f et b un nombre réel. On dit que la limite de f pour x tendant vers a est égale à b, ou que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

On note alors

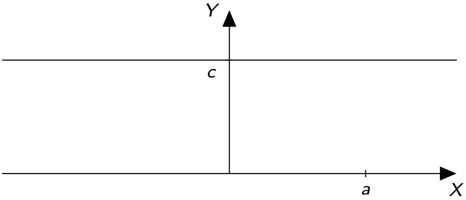
$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

et on dit que f *admet une limite finie en a, égale à b.*



Exercices théoriques

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$, où $c \in \mathbb{R}$. Démontrer à l'aide de la définition que
$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} c = c,$$
pour tout $a \in \mathbb{R}$.

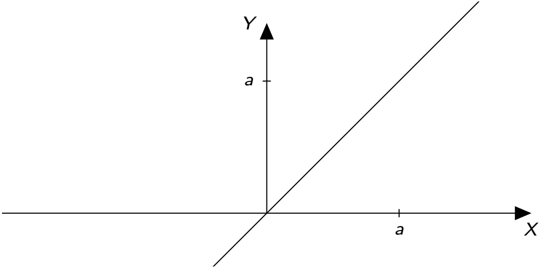


Exercices théoriques II

2. Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Démontrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = \lim_{x \to a} x = a,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. Se convaincre visuellement sur la représentation graphique suivante.

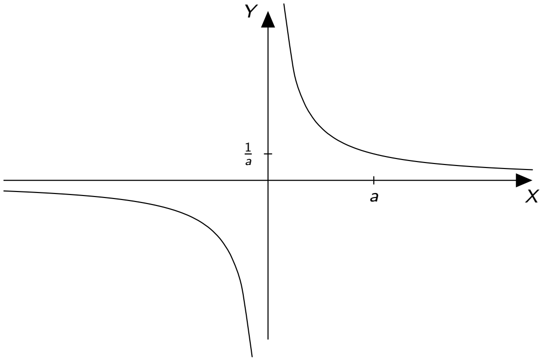


Exercices théoriques III

❸ Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. Démontrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \to a} f_3(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a},$$

pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se convaincre du résultat sur la représentation graphique suivante.



Exercices théoriques IV

4. Soit la fonction

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Démontrer à l'aide de la définition que cette fonction n'admet pas de limite finie en 1. Donner une représentation graphique de cette fonction et se convaincre de la non existence de la limite finie en 1 à partir de cette représentation.

5. Même exercice pour la fonction f_5 définie par

$$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

6. Soit la fonction f_6 définie par

$$f_6 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2.$$

Déterminer si la limite $\lim_{x \to 1} f_6(x)$ est finie et calculer sa valeur à partir de la définition. Donner au préalable une représentation graphique de cette fonction et se convaincre de la réponse à l'aide de cette représntation.

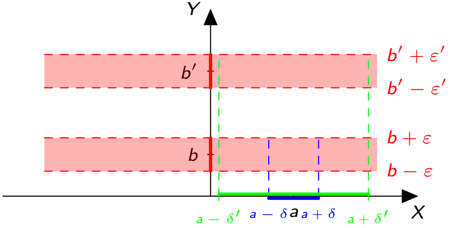
Unicité

Proposition

Si f admet une limite finie en a, alors cette limite est unique :

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b', \quad \text{alors} \quad b = b'.$$

On suppose qu'il y a deux limites distinctes, et on arrive à une contradiction.



Ce résultat se généralisera aux limites infinies $+\infty$ et $-\infty$, moyennant le fait que ces expressions "englobent" ∞.

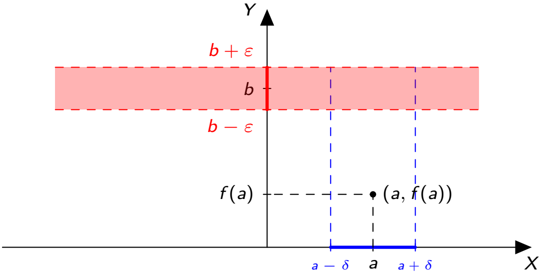
Valeur si $a \in \mathrm{dom}_f$

Proposition

Si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si f admet une limite finie en a alors on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- On suppose $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$ et on arrive à une contradition :



- **Remarque :** La définition peut varier d'un livre à l'autre. Les théories qui en résultent sont équivalentes.

Unification des définitions

Peut-on résumer toutes ces définitions ? Nous avons vu :

1. Une limite finie égale à 200 quand t tend vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (t > M \,\text{et}\, x \in \mathrm{dom}_S) \Rightarrow S(t) \in]200 - \varepsilon, 200 + \varepsilon[.$$

2. Une limite égale à $+\infty$ en L :

$$\forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (L - \delta < x < L + \delta \,\text{et}\, x \in \mathrm{dom}_p) \Rightarrow p(x) > N.$$

3. Une limite finie, égale à b, en un nombre a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Pour définir l'égalité $\lim_{x \to r} f(x) = s$, on fixe les objectifs dans l'ensemble d'arrivée, en utilisant une notion de proximité par rapport à s, de voisinage, et on impose qu'on puisse atteindre cet objectif de proximité pour tous les points dans un voisinage de r (suffisament proches de r).

Voisinages et définition

Définition

Soit a un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞.

1. On appelle voisinage[1] de a tout ensemble V_a
   - de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ pour un $\varepsilon > 0$, si $a \in \mathbb{R}$;
   - de la forme $]N, +\infty[$ pour un $N \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$;
   - de la forme $]-\infty, N[$ pour un $N \in \mathbb{R}$, si $a = -\infty$;
   - de la forme $]-\infty, -N[\cup]N, +\infty[$ pour un $N \in \mathbb{R}$, si $a = \infty$.
2. Alors $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ est adhérent à dom_f si tout voisinage de a rencontre dom_f.
3. Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$, si a est adhérent à dom_f, alors $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si pour tout voisinage V_b de b, il existe un voisinage V_a de a, tel que pour tout $x \in V_a \cap \mathrm{dom}_f$, $f(x) \in V_b$.
4. Si a n'est pas ahérent à dom_f, on dit que la limite de f en a n'a pas de sens.

Cette définition permet d'obtenir toutes les définitions de limites.

[1] Pour les puristes, il s'agit en fait de voisinages ouverts de base.

Limites finies en l'infini, et infinie en un réel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et a, b des nombres réels. On suppose selon le cas que $+\infty$ (resp. $-\infty$, a) est adhérent à dom_f.

Définition (Limite finie en l'infini)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x > M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

On dit, selon le cas, que f admet une limite finie (égale à b) en $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition (Limite infinie en un réel)

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > N.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < N.$$

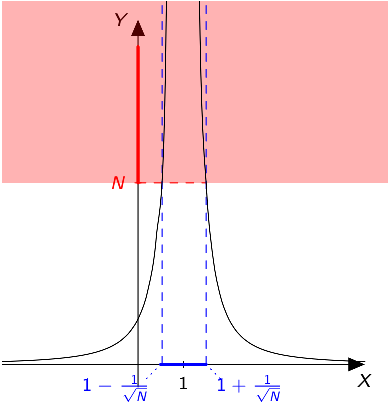
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > N.$$

Dans chacune de ces situations, on dit que f *admet une limite infinie en* a.

Limites infinies en un réel : exemples I

$$\text{On a } \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

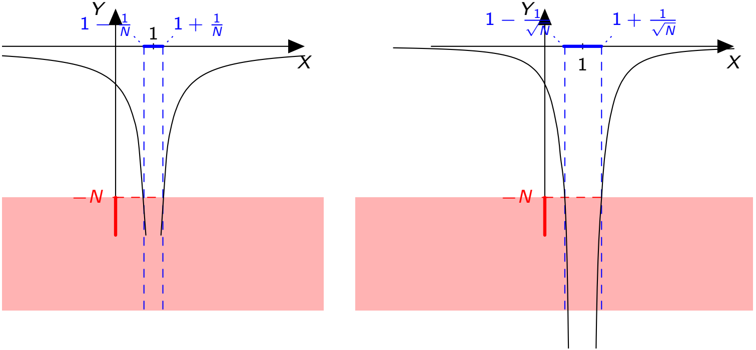
On peut trouver ici aussi δ en fonction de $N > 0$ pour satisfaire la définition.



Limites infinies en un réel : exemples II

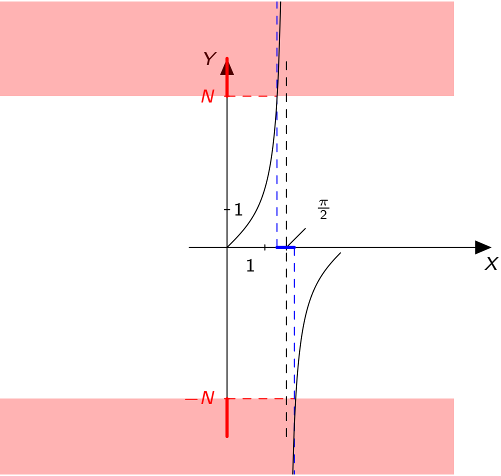
On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{|x-1|} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$.

En effet, pour tout $N > 0$, on peut choisir $\delta = \frac{1}{N}$. Si $|x-1| < \delta$, alors on a $\frac{-1}{|x-1|} < -N$.



Limites infinies en un réel : exemples III

On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}(x) = \infty$.



Limites infinies en $+\infty$ et $-\infty$

Définition (Limites en $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x > M) \Rightarrow f(x) > N.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x > M) \Rightarrow f(x) < N.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x > M) \Rightarrow |f(x)| > N.$$

On dit alors que f admet une limite infinie en $+\infty$.

Définition (Limites en $-\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x < M) \Rightarrow f(x) > N.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x < M) \Rightarrow f(x) < N.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } x < M) \Rightarrow |f(x)| > N.$$

On dit alors que f admet une limite infinie en $-\infty$.

Remarque : on peut se limiter à certains N, positifs ou négatifs.

Limites à gauche et à droite

Idée : On s'intéresse aux valeurs plus grandes que a (à droite) ou plus petites (à gauche). On oublie le reste.
Pour la limite à gauche (rep. droite), il faut que a soit adhérent à $\mathrm{dom}_f \cap]-\infty, a[$ (resp. $\mathrm{dom}_f \cap]a, +\infty[$).

Définition

Soit a un nombre réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$.

1. On dit que *la limite à gauche* de $f(x)$ pour x tendant vers a vaut b si on a $\lim\limits_{x \to a} f|_{]-\infty,a[}(x) = b$. Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.
2. On dit que la *limite à droite* de $f(x)$ pour x tendant vers a vaut b si on a $\lim\limits_{x \to a} f|_{]a,+\infty[}(x) = b$. Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.

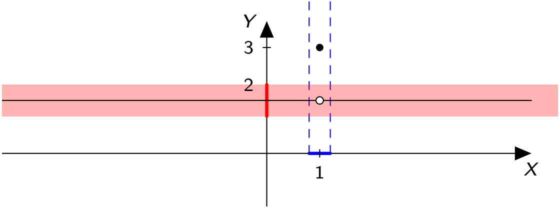
Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a adhérent à $\mathrm{dom}_f \cap A$, on définit la limite de $f(x)$ pour x tendant vers a, dans A par
$\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f|_A(x)$.

Limites restreintes : exemples

Soit la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas, $\lim\limits_{x \to 1, x \neq 1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Lien avec les limites I

Exemple : Si $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$, alors

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ n'a pas de sens, car $\mathrm{dom}_f \cap]-\infty; 0[= \varnothing$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ *alors chaque limite* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *vaut* ℓ*, ou n'a pas de sens.*

Remarque : C'est une façon de montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$*, alors chaque limite* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *vaut* ∞ *(ou* $+\infty$*,* $-\infty$*), ou n'a pas de sens.*

Lien avec les limites II

La réciproque de ces théorèmes est vraie, mais elle est longue à énoncer.

Proposition

1. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *et* $a\in\mathbb{R}\setminus\mathrm{dom}_f$. *Si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty,\infty\}$$

   alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. *Si une des deux limites n'a pas de sens, le résultat reste vrai.*
3. *Si* $a\in\mathrm{dom}_f$, *le résultat reste vrai si on ajoute l'hypothèse* $\ell = f(a)$.

Théorèmes de calcul I

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition (Sommes et produits: limites finies)

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Si on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = b', \quad (b, b' \in \mathbb{R}),$$

alors on a

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = b + b', \quad \lim_{x \to a}(fg)(x) = bb', \quad \lim_{x \to a}(cf)(x) = cb.$$

La limite d'une somme est la somme des limites et la limite du produit est le produit des limites, quand elles existent (et sont finies).

Remarque : ces résultats valent pour les limites restreintes.

Applications

1. Nous avons démontré que $\lim_{x \to a} x = a$ pour $a \in \mathbb{R}$. Soit alors
$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$
On a alors
$$\lim_{x \to a} P(x) = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 = P(a).$$
2. Nous avons démontré que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. On a donc
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$
3. On a $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$, puisque $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$.
4. De même, on a $\lim_{x \to +\infty} (\frac{|x|+1}{x})(1 + \frac{1}{x^3}) = 1$

Règles de calcul II

Proposition (Sommes et produits : limites infinies)

Soient f et g deux fonctions, et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. *Si f admet une limite finie en a et si g admet une limite infinie en a ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) alors $f+g$ admet la limite ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) en a. Ce résultat reste vrai si f est borné au voisinage de a.*
2. *Si f admet une limite finie $c \neq \mathbf{0}$ en a et si g admet une limite infinie en a ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.), alors fg admet une limite infinie en a :($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) si $c > 0$ et ($+\infty, -\infty, \infty$ resp.) si $c < 0$.*
3. *Si f et g admettent la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a, alors $f+g$ admet la limite $+\infty$ (resp $-\infty$).*
4. *Si f et g admettent la limite ∞ en a, alors $f\,g$ admet la limite ∞ en a. De plus, si f et g admettent simultanément les limites $+\infty$ ou $-\infty$, alors $f\,g$ admet la limite $+\infty$ en a. Si l'un des deux tend vers $+\infty$ et l'autre $-\infty$, alors $f\,g$ admet la limite $-\infty$.*

Applications II

1. On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 + x = +\infty$.
2. On a $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) + 1 + x = +\infty$, puisque la fonction sin est *bornée*, même si elle n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. On a $\lim_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} -3x^2 = -\infty$.

Théorème de prolongement

Idée : remplacer une fonction f par une fonction plus simple g, qui a les mêmes valeurs que f, quand $f($ est défini.

Définition

Une fonction g prolonge f si $\mathrm{dom}_f \subset \mathrm{dom}_g$ et $\forall x \in \mathrm{dom}_f$, $f(x) = g(x)$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x + 2$.

Théorème (Prolongement)

Soient f et g deux fonctions telles que

1. la fonction g prolonge f;
2. la fonction g admet une limite en a;

alors la fonction f admet une limite en a et on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Preuve : Qui peut le plus peut le moins.

Théorème de localité

Idée : remplacer une fonction f compliquée par une fonction plus simple g, égale à f au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Théorème (Localité)

Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si

1. Il existe un voisinage V de a tels que $f|_V = g|_V$;
2. La fonction g admet une limite en a;

alors la fonction f admet une limite en a et on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Remarque : on peut combiner ce théorème avec le théorème de prolongement.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{|x|+1}{x}$, alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x+1}{x} = -1.$$

Applications II

1. On a $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ et $\lim_{x\to 2}\frac{|x|-2}{x-2}=1$.
2. Calculer la limite pour x tendant vers 0 de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x}{x}$.
   On considère $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 1$. Cette fonction prolonge f. On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.
3. Calculer la limite pour x tendant vers $+\infty$ de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{|x|+1}{x}$.
   On considère $V=]0,+\infty[$, et
   $$g:]0,+\infty[:x\mapsto 1+\frac{1}{x}.$$
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$, donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.
4. Calculer la limite pour x tendant vers $-\infty$ de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{|x|+1}{x}$.
   On considère $V=]-\infty,0[$ et
   $$g:]-\infty,0[:x\mapsto -1+\frac{1}{x}.$$
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Règles de calcul III

Proposition (Fonctions composées)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*,* $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $b' \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, +\infty\}$*.*
Si on a

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

et

$$\lim_{x \to b} f(x) = b'$$

alors on a

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = b'.$$

Applications III : quotients

- On a démontré que $\lim_{x\to b} \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$, pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Si $\lim_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors on a $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$.

Proposition

Si f et g sont telles que $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = b_2 \neq 0$ *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}.$$

- Soit la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes.
  Pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q(a) \neq 0$ (i.e. $a \in \mathrm{dom}_R$) on a
  $$\lim_{x\to a} R(x) = R(a).$$
- On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.
  On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+4x+7} = 0$.

Exercices résolus

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$.
    C'est un polynôme, donc on évalue. On calcule $f(1) = 0$.
12. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x-2}$. Calculer $\lim_{x \to 2} h(x)$.
    1. C'est un quotient, donc on calcule la limite du num. et du déno. On trouve 0 et 0. Le thm. ne s'applique pas (on note $\frac{0}{0}$). On factorise et on prolonge.
    2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 3 = 5$.
13. Si $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$. Calculer $\lim_{x \to -2} f(x)$ et $\lim_{x \to 2} f(x)$.
    1. Le domaine de f est $]-\infty; -1-\sqrt{2}] \cup [-1-\sqrt{2}; +\infty[$, donc on ne peut pas calculer $\lim_{x \to -2} f(x)$, car -2 n'est pas adhérent au domaine.
    2. Pour $\lim_{x \to 2} f(x)$, on calcule d'abord $\lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1 = 7$
    3. Puis $\lim_{x \to 7} \sqrt{x} = \sqrt{7}$.
14. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$. Calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$.
    1. C'est un quotient, donc on calcule la limite du num. et du déno. On trouve 0 et 0. Le thm. ne s'applique pas (on note $\frac{0}{0}$).

② On multiplie haut et bas par le conjugué et on prolonge :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x} \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

16. La limite $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

① vaut 0

② vaut 6

③ vaut $\frac{0}{0}$

④ n'est pas définie

Solution : Quotient : on trouve "$\frac{0}{0}$". Le thm ne s'applique pas.
Conjugué et prolongement.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \sqrt{x+5}+3 = 6.$$

Exercices supplémentaires

1. **Faire le 15** (même que le 16), et **faire le 17** (2 mult. par le conjugué)
2. $\lim_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x-3)^3 \sin(\frac{\pi}{8}x)}{x^2(\sqrt{x+5}-3)} = \lim_{x\to 4} \dfrac{(x-3)^3 \sin(\frac{\pi}{8}x)}{x^2} \lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$
3. $\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 4x + 7 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{7}{2x^3}) = +\infty.$
4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-4x}{3x^3-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2(1-\frac{4x}{2x^2})}{3x^3(1-\frac{2x}{3x^3}+\frac{1}{3x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{3x^3} = 0$
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-4x}}{3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(2-\frac{4x}{2x^2})}}{3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{(2-\frac{4x}{2x^2})}}{3x+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$
6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-4x}}{3x+2} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$

Ce sont les principales techniques, avec le thm de l'Hospital, que je ne reverrai probablement pas.

Derniers résultats

Proposition (Inégalités)

Si il existe un voisinage V *de* a *tels que* $f(x) \leqslant g(x)$*, pour tout* $x \in V$*, alors on a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *(si les limites existent et sont finies).*

Proposition (Théorème de l'étau)

Si il existe un voisinage V *de* a *tel que* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *pour tout* $x \in V$ *et si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b \in \mathbb{R}$*, alors on a* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$*.*

La continuité

Idée : f est continue si on trace sa représentation graphique "sans lever le crayon", c'est à dire sans saut (parallèle aux ordonnées).

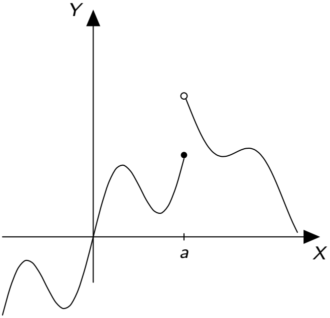


Figure: Une discontinuité en a

Définitions

Définition (Continuité)

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Cette limite vaut alors $f(a)$.

Ici encore, la définition dépend des ouvrages considérés, mais tout conduit à une même théorie.

Définition

L'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ en lesquels f est continue est le *domaine de continuité de f*. Nous le noterons dom_f^c. Si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A (i.e. $A \subset \mathrm{dom}_f^c$). On note alors $f \in C_0(A)$.

Proposition

Si f est continue en a, alors on a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Continuité à gauche et à droite

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Proposition

Si f est continue à gauche et à droite en a, alors f est continue en a.
La continuité en a est une notion locale : si deux fonctions ont les mêmes valeurs au voisinage de a, l'une est continue en a si et seulement si l'autre l'est.

Combinaisons et composées

Proposition (Combinaisons)

Soient f et g des fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + g$, $f \cdot g$ et $c \cdot f$ sont continues en a.

Proposition (Composées)

Si g est continue en a et si f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a. En particulier, on a

$$\mathrm{dom}_g^c \cap \{x : g(x) \in \mathrm{dom}_f^c\} \subset \mathrm{dom}_{f\circ g}^c.$$

Remarque : en général l'inclusion est stricte.

Exemples

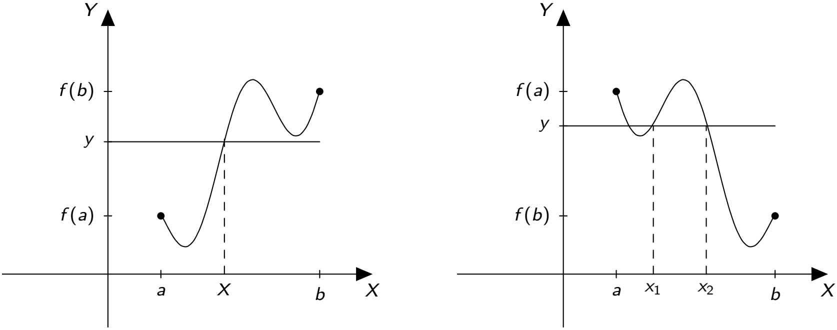
1. Toute fonction polynomiale
$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto Q(x) = q_r x^r + \cdots + q_0$$
est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. La fonction
$$\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$
est donc continue sur $\mathrm{dom}_g^c \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
4. La fonction
$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$
est donc continue sur $\mathrm{dom}_f^c \cap \mathrm{dom}_g^c \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
5. Toute fraction rationnelle $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur son ensemble de définition.

Quelques fonctions continues

1. Les fonctions racines p-èmes pour p pair sont continues sur $[0, +\infty[$;
2. Les fonctions racines p-èmes pour p impair sont continues sur $\mathbb{R}$;
3. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
4. La fonction sin et la fonction cos sont continues sur $\mathbb{R}$;
5. Les fonctions tg et cotg sont continues sur leur domaine de définition;
6. Les fonctions exponentielle et logarithmes sont continues sur leur domaine de définition (nous reverrons ces fonctions d'ici peu).

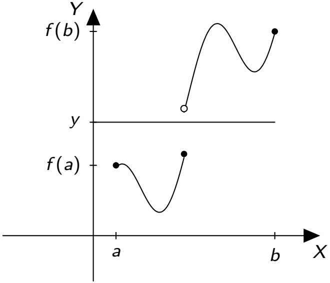
Théorème (Valeurs intermédiaires)

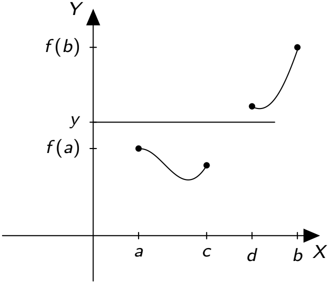
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.



Les hypothèses sont utiles

La fonction f doit être continue, et le domaine sur lequel on la considère doit être un intervalle.





Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas général et théorème de Bolzano

Théorème (Valeurs intermédiaires II)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$. On suppose en outre que les limites

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = B$$

existent (A, B, a, b) peuvent être infinis). Pour tout nombre y compris strictement entre A et B, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$.

Théorème (Bolzano)

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Rem : on peut utilser le théorème de Bolzano sous la forme générale.

Application : la dichotomie

Démontrer que l'équation $3x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution dans $[0,1]$, déterminer cette solution avec une erreur maximale de 0.125.

La fonction

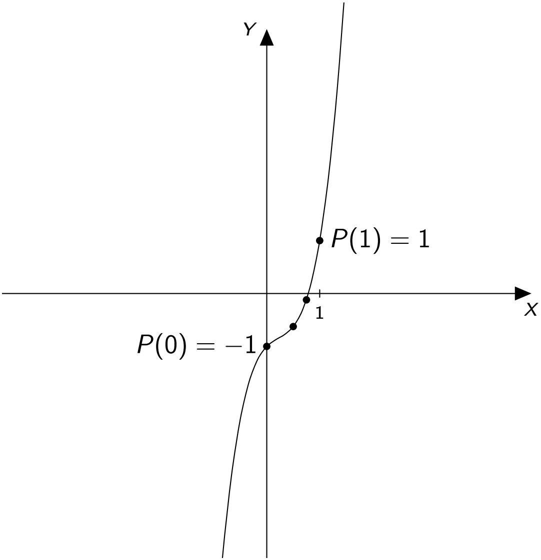
$$P : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

est définie est continue sur $[0,1]$ et on a de plus $P(0) = -1$ et $P(1) = 1$. On a donc une solution à l'équation dans $[0,1]$.

On calcule $P(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{8}$: il existe $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $P(x_0) = 0$.

On calcule $P(\frac{3}{4}) < 0$: il existe $x_0 \in]\frac{3}{4}, 1[$ tel que $P(x_0) = 0$. On peut donc affirmer que l'équation admet la solution $\frac{7}{8}$, à $\frac{1}{8}$ près.

Illustration



Théorème (Bornes atteintes)

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Il existe m et M dans $[a, b]$ tels que

$$f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M), \quad \forall x \in [a, b].$$

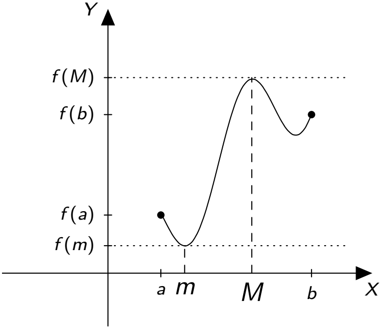


Figure: Les bornes atteintes.