Mathématique

Primitives et intégrales

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

Un problème, deux solutions I

Problème

- Soit $x(t)$ position au temps t d'un mobile sur un axe (en m).
- La position en $x(0) = x_0$, et la vitesse $v(t)$ (en m/s) sont données.
- Trouver $x(4)$, et trouver $x(u)$ pour tout u, dans les cas suivants : $v(t) = 7$, $v(t) = -3$, ou $v(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$.

Solution 1 : Résoudre

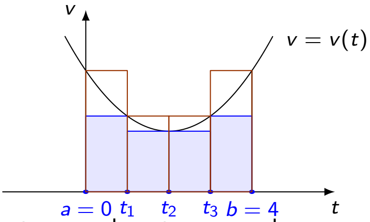
$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \quad \forall t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

trouver $x(t)$ pour tout t, puis $x(4)$.
Cette méthode consiste à trouver une primitive de $v(t)$, qui vaut x_0 en 0.

Un problème, deux solutions II

Solution 2 :

- On découpe l'intervalle de temps en morceaux (sous intervalles) où la vitesse est "à peu près constante".
- Sur chaque sous-intervalle, on mesure la différence de coordonnées (i.e. l'"espace parcouru"), à l'aide de la formule pour v constant.
- On fait la somme et on obtient une (des) approximation(s) de la réponse cherchée.
- On passe à la limite quand la largeur des sous-intervalles tend vers 0. Voici une représentation de cette méthode :



Dans un cas, on obtient une valeur trop grande pour $x(4)$, dans l'autre une valeur trop petite . On raffine le découpage, et on passe à la limite. On définit ainsi l'intégrale. Les deux solutions doivent coïncider !

Primitives : définitions formelles

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$DF(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

On dit alors que f est primitivable sur I.

Remarques :

1. Il existe des fonctions qui ne sont pas primitivables;
2. Quand on dispose d'une primitive, elle n'est pas unique;
3. On peut étendre le problème à des fonctions définies sur des unions d'intervalles ouverts (par exemple $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}_0$);
4. On note souvent $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f, ou l'ensemble de toutes les primitives de f (sur I).

Exemples : Des primitives de $f(x) = x^2$, sur $I = \mathbb{R}$ sont données par les fonctions $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 4$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 7$,...

Propriétés

Proposition

Si F est une primitive de f sur $]a, b[$, alors pour toute constante c, la fonction $F + c$ est une primitive de f sur $]a, b[$.

Preuve : Il suffit de dériver $F + c$.

Proposition

Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle $]a, b[$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$ sur $]a, b[$.

Preuve : La dérivée de $F - G$ est nulle sur $]a, b[$.

Proposition

Soient f une fonction primitivable sur $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ et $r \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur $]a, b[$ telle que $F(x_0) = r$.

Preuve : Ayant une primitive G, il suffit d'ajouter la bonne contante pour trouver F, c'est $r - G(x_0)$.

Notation et quelques exemples

Notation

Si F et G ont même domaine de dérivabilité, on note $F \simeq G$ si $F' = G'$.

Sur un seul intervalle, $F \simeq G \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$. S'il y a plusieurs intervalles, il y a plusieurs constantes.

Exemples de primitives :

1. On a $\int x^m \,\mathrm{d}x \simeq \frac{x^{m+1}}{m+1}$, sur $\mathbb{R}$, si m est entier distinct de -1;
2. On a $\int \sin(x) \,\mathrm{d}x \simeq -\cos(x)$, sur $\mathbb{R}$;
3. On a $\int \cos(x) \,\mathrm{d}x \simeq \sin(x)$, sur $\mathbb{R}$;
4. On a $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{tg}\,(x)$, sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
5. On a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \simeq \arcsin(x)$, sur $]-1, 1[$;
6. On a $\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{arctg}(x)$, sur $\mathbb{R}$.

Et nous reverrons bientôt

1. On a $\int x^r \,\mathrm{d}x \simeq \frac{x^{r+1}}{r+1}$, sur $]0, +\infty[$ si $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
2. On a $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \simeq \ln(|x|)$, sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$;
3. On a $\int \exp(x) \,\mathrm{d}x \simeq \exp(x)$, sur $\mathbb{R}$;

Règles de calcul: combinaisons linéaires

Ces règles découlent des règles analogues pour les dérivées.

Proposition (Combinaisons linéaires)

Si f, g sont primitivables sur $]a, b[$ et $r, s \in \mathbb{R}$, alors $rf + sg$ est primitivable sur $]a, b[$ et

$$\int (rf + sg)(x)\,\mathrm{d}x \simeq r\int f(x)\,\mathrm{d}x + s\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

sur $]a, b[$.

Exemples :

1. $\int 3x^3 + 4x^2 + 1\,\mathrm{d}x \simeq 3\int x^3\,\mathrm{d}x + 4\int x^2\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x \simeq 3\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + x$, sur $\mathbb{R}$
2. $\int \frac{3}{1+x^2} + x^5\,\mathrm{d}x \simeq 3\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int x^5\,\mathrm{d}x \simeq 3\mathrm{arctg}(x) + \frac{x^6}{6}$ sur $\mathbb{R}$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Règles de calcul : primitivation par parties

Idée : Si f et g sont dérivables sur $]a,b[$ alors

$$D(f\,g) = (Df)g + f\,(Dg) \quad \text{sur }]a,b[.$$

Vu dans le sens de la primitivation, cette formule donne le résultat suivant.

Proposition

Si f et g sont dérivables sur $I =]a,b[$ et si fDg est primitivable sur I alors gDf est primitivable sur I et on a

$$\int g(x)\,Df(x)\,\mathrm{d}x \simeq f(x)g(x) - \int Dg(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{sur }]a,b[.$$

Exemple : calcul de $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $g(x) = x$, $Df(x) = \sin(x)$.
On obtient $Dg(x) = 1$, $f(x) = -\cos(x)$, donc

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \simeq -x\cos(x) + \int 1\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \simeq -x\cos(x) + \sin(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Encore un exemple

Calculer la primitive $\int x^2 \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $\quad g(x) = x^2, \quad Df(x) = \sin(3x).$
On obtient $\quad Dg(x) = 2x, \quad f(x) = -\frac{\cos(3x)}{3},$ donc

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(3x)\,\mathrm{d}x &\simeq -\frac{x^2\cos(3x)}{3} - \int 2x\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &\simeq -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On pose $\quad g(x) = x, \quad Df(x) = \cos(3x).$
On obtient $\quad Dg(x) = 1, \quad f(x) = \frac{\sin(3x)}{3},$ donc,

$$\int x^2 \sin(3x)\,\mathrm{d}x \simeq -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{2x\,\sin(3x)}{9} + \frac{2\cos(3x)}{27}.$$

D'autres exemples classiques, mais étranges

1. Calculer $\int \mathrm{arctg}(x) 1 \, \mathrm{d}x$.

   On pose $g(x) = \mathrm{arctg}(x)$, $Df(x) = 1$.
   On obtient $Dg(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = x$, donc

   $$\int 1 \, \mathrm{arctg}(x) \, \mathrm{d}x \simeq x\mathrm{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$
   $$\simeq x\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

   Vérifier, en dérivant le résultat !

2. Trouver une primitive de ln sur $]0, +\infty[$, (sachant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$) i.e. calculer $\int \ln(x) 1 \, \mathrm{d}x$.

   On pose $g(x) = \ln(x)$, $Df(x) = 1$.
   On obtient $Dg(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x$, donc

   $$\int 1 \, \ln(x) \, \mathrm{d}x \simeq x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \simeq x \ln(x) - x.$$

   Vérifier, en dérivant le résultat !

Primitivation par substitution

- On regarde la formule $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
- Une primitive du membre de droite est donnée par $f \circ g$.
- Si on veut primitiver une fonction du type $f(g(x))g'(x)$, il faut plutôt écrire $\boldsymbol{(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)}$, si $F'(x) = f(x)$.

Proposition (Primitivation par substitution)

Si f admet la primitive F alors

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \simeq F(g(x)) = \int f(u)\mathrm{d}u|_{u=g(x)}.$$

- **Applications** : repérer une fonction composée, multipliée par la dérivée de la fonction "interne" (à une constante près);
- **Notation :**
  1. On pose $u = g(x)$ et $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$
  2. On calcule $F(u) \simeq \int f(u)\mathrm{d}u$
  3. On remplace u par sa valeur $g(x)$.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Calcul de la primitive $\int 3\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.
   a) On pose $u = 3x$ et on obtient $\mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$;
   b) On calcule $\int \cos(u)\mathrm{d}u \simeq \sin(u)$;
   c) On remplace u par $3x$, donc $\int 3\cos(3x)\,\mathrm{d}x \simeq \sin(3x)$
   d) On vérifie en dérivant !

2. Calcul de la primitive $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$:
   a) On pose $u = 1 + x^2$ et on a $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$;
   b) On remplace et on calcule $\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \simeq \sqrt{u}$;
   c) On remplace u par $1 + x^2$, et on obtient $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \simeq \sqrt{1+x^2}$.
   d) On vérifie en dérivant !

Exemples II

1. Calcul de la primitive $\int \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$:
   a) On pose $u = \sin(x)$, donc $\mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x$;
   b) On remplace et on calcule $\int u^3 \mathrm{d}u \simeq \frac{u^4}{4}$;
   c) On remplace la fonction u par sa valeur et on a
$$\int \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{\sin^4(x)}{4}.$$

2. Calcul de $\int \mathrm{tg}\,(x)\,\mathrm{d}x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
   a) On doit calculer $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$;
   b) On pose $u = \cos(x)$, donc $\mathrm{d}u = -\sin(x)\mathrm{d}x$;
   c) On remplace et on calcule $-\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u$, pour $u > 0$
   d) On a
$$\int \mathrm{tg}\,(x)\,\mathrm{d}x \simeq \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \simeq -\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u|_{u=\cos(x)} \simeq -\ln(\cos(x)).$$
   e) On montre que $G(x) = -\ln(|\cos(x)|)$ est une primitive de la fonction tangente sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Primitivation par changement de variables

Idée : appliquer la primitivation par substitution, en créant une composée.
Si

1. f est définie sur $]a, b[$;
2. $g :]a', b'[\to]a, b[$ est une bijection;

alors on définit

$$f \circ g :]a', b'[\to \mathbb{R} : t \mapsto f \circ g(t).$$

Réciproquement, si f est définie sur $]a', b'[$, alors on peut considérer

$$f \circ g^{-1} :]a, b[\to \mathbb{R} : t \mapsto f \circ g^{-1}(t).$$

Primitivation par changement de variables

Proposition (Primitivation par changement de variables)

Si $g :]a', b'[\to]a, b[$ *est dérivable et si* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *est primitivable et admet la primitive* F, *alors*

$$\int f(g(t)) Dg(t)\,\mathrm{d}t \simeq F \circ g, \quad \textit{sur }]a', b'[.$$

Si g *est une bijection dérivable entre* $]a', b'[$ *et* $]a, b[$, *dont la dérivée ne s'annule pas sur* $]a', b'[$, *alors on a*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \simeq F \simeq \left(\int f(g(t)) Dg(t)\,\mathrm{d}t \right) \circ g^{-1}, \quad \textit{sur }]a, b[.$$

Notation :

1. On pose $x = g(t)$ on a $t = g^{-1}(x)$
2. On calcule $\mathrm{d}x = Dg(t)\mathrm{d}t$
3. On remplace et on calcule la primitive obtenue
4. On remplace t par sa valeur $g^{-1}(x)$.

Exemple I

Calcul de la primitive $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ sur $]-1,1[$:

On pose $x = g(t) = \sin(t) \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On écrit $\mathrm{d}x = D(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \cos(t)\mathrm{d}t$

On doit donc calculer

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t &\simeq \int \cos^2(t)\mathrm{d}t \\ &\simeq \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t \simeq \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}.\end{aligned}$$

Il reste à composer avec g^{-1}, i.e. remplacer t par sa valeur en fonction de x (on a $t = \arcsin(x)$):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Exemple II

Calculer $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

On pose $x = \operatorname{tg}(t) \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On écrit $\mathrm{dx} = D(\operatorname{tg}(t))\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{dt}$

On calcule sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2(t)}{(1+\operatorname{tg}^2(t))^3}\,\frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{dt} \simeq \int \cos^4(t)\operatorname{tg}^2(t)\,\mathrm{dt} \simeq \int \cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{dt}.$$

On linéarise

$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t)).$$

Finalement,

$$\int \cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{dt} \simeq \frac{1}{8}\int (1-\cos(4t))\,\mathrm{dt} \simeq \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin(4t),$$

ou

$$\begin{aligned}\int \cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{dt} &\simeq \frac{1}{8}(t - \sin(t)\cos^3(t) + \sin^3(t)\cos(t)) \\ &\simeq \frac{1}{8}(t + \frac{\mathrm{tg}^3(t) - \mathrm{tg}(t)}{(1+\mathrm{tg}^2(t))^2}).\end{aligned}$$

On peut donc exprimer en fonction de $x = \mathrm{tg}(t)$ (ou $t = \mathrm{arctg}(x)$) :

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{8}(\mathrm{arctg}(x) + \frac{x^3 - x}{(1+x^2)^2}).$$

Et on peut, encore une fois, vérifier en dérivant.

Exercices résolus I

Pour chaque primitive, on regarde si elle est directe ou s'y ramène par calcul algébrique, si c'est une somme de primitives directes, si on peut le faire par substitution ou par parties. On vérifie en dérivant le résultat.

1.1 $\int (\frac{x}{2}+x^2+\frac{x^3}{4})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x+\int x^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}+c,\ c\in\mathbb{R}$

1.5 $\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+c = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+c,\ c\in\mathbb{R}$

1.6 $\int \sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(kx)}{k}+c,\ c\in\mathbb{R}$. (directe ou poser $u=kx$)

1.13 $\int x\exp(x^2+1)\,\mathrm{d}x$. Substitution ou parties ? On a une fonction composée. Que pose-t-on ?

1) On pose $u = x^2+1$;
2) On obtient $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ et on calcule $\int \frac{1}{2}\exp(u)\mathrm{d}u \simeq \frac{1}{2}e^u$.
3) On remplace u par x^2+1 : $\int x\exp(x^2+1)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2}e^{(x^2+1)}$.

1.17 $\int \cos(x)\sqrt{3+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$. Même raisonnement.

1) On pose $u = 3+\sin(x)$.
2) On a $\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$
3) on calcule $\int \sqrt{u}\mathrm{d}u \simeq \frac{2}{3}\sqrt{u^3}$
4) Donc $\int \cos(x)\sqrt{3+\sin(x)}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{2}{3}\sqrt{(3+\sin(x))^3}$.

Exercices résolus II

Sup $\int x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$. Par substitution ou par parties ?

On pose $g(x) = x, \quad Df(x) = \sin(2x).$

On obtient $Dg(x) = 1, \quad f(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}.$

Donc

$$\int x \sin(2x)\,\mathrm{d}x \simeq -\frac{x\cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \simeq -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}.$$

30 $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$. Formule de Carnot : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, donc

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,\mathrm{d}x \simeq \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}.$$

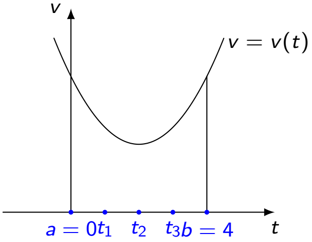
42 Que vaut la primitive $\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x$, à une constante près, et sur $]0,+\infty[$?

1) $-x + \ln(x)$
2) $x - x\ln(x)$
3) $-x + x\ln(x)$
4) $x - \ln(x)$

Dériver les solutions proposées, ou procéder par parties.

Intégrale d'une fonction continue sur un fermé $[a, b]$

Revenons à la vitesse, continue sur l'intervalle $[a, b]$, et formalisons la deuxième méthode de calcul.



Définition

Un découpage $D = [t_1, \ldots, t_{n-1}]$ de l'intervalle $[a, b]$ est la donnée de $n - 1$ points $t_1 < \cdots < t_{n-1} \in]a, b[$. On pose $a = t_0$ et $b = t_n$.
La largeur de D est $L(D) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i - t_{i-1})$.

On a donc n sous-intervalles : $[t_{i-1}, t_i]$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On veut calculer $S = x(b) - x(a) = \sum_{i=1}^{n} (x(t_i) - x(t_{i-1}))$.

Approximations par excès et par défaut

Par le théorème des bornes atteintes, v admet sur $[t_{i-1}, t_i]$

- minimum global, réalisé en un point m_i;
- un maximum global, réalisé en un point M_i.

On définit la quantité

$$A_{\text{inf}}(t_0, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} v(m_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} v(m_i)\Delta t_i.$$

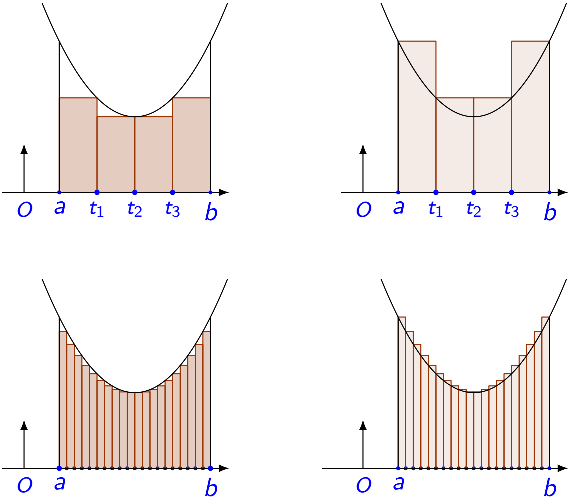
C'est une approximation par défaut de $x(b) - x(a)$. Cela correspond à la somme des aires des rectangles de $[t_{i-1}, t_i]$ et de hauteur $v(m_i)$.
On définit aussi

$$A_{\text{sup}}(t_0, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} v(M_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} v(M_i)\Delta t_i.$$

C'est une approximation par excès.

Exemples et interprétation

Les nombres $A_{\inf}$ et $A_{\sup}$ ont une représentation simple sur le graphique : ils correspondent à des sommes d'aires de rectangles.



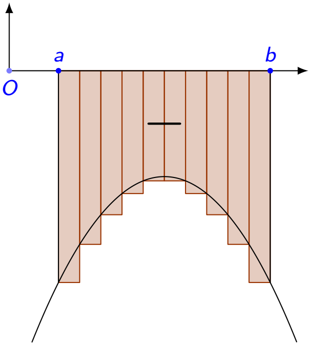
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

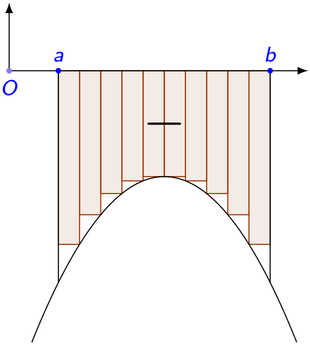
Le cas de fonctions à valeurs négatives

Si la fonction est strictement négative sur l'intervalle $[a, b]$, on calcule les mêmes valeurs approchées :

$$A_{\mathrm{inf}} = \sum_{i=1}^{n} v(m_i)(t_i - t_{i-1}), \quad A_{\mathrm{sup}} = \sum_{i=1}^{n} v(M_i)(t_i - t_{i-1}),$$

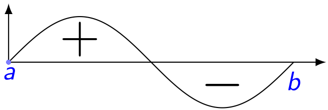
Cela correspond à une somme d'aires, comptées négativement :

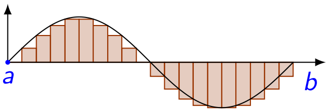


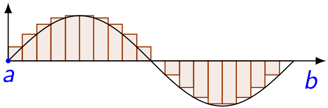


En général...

Quand f change de signe sur $[a, b]$, on calcule les mêmes quantités. Cela correspond à des aires, comptées positivement ou négativement, selon les cas :







On a donc les mêmes approximations A_{inf} et A_{sup}.

Découpages de Riemann

L'idée :

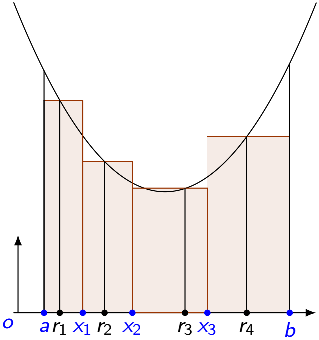
- le choix de m_i dans $[t_{i-1}, t_i]$ donne toujours une valeur trop petite pour l'aire;
- le choix de M_i donne une valeur trop grande;
- On fixe plutôt un nombre r_i dans chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

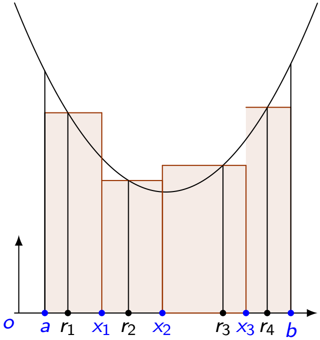
Définition

1. Un découpage de Riemann de l'intervalle $[a, b]$ est la donnée d'un découpage $[t_1, \ldots, t_{n-1}]$ de $[a, b]$ et de n points $r_1, \ldots, r_n$ tels que $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pour tout $i \leqslant n$.
2. On note ce découpage $D = [a, t_1, \ldots, t_{n-1}, b; r_1, \ldots, r_n]$
3. La largeur $L(D)$ du découpage D est la largeur de $[t_1, \ldots, t_{n-1}]$.
4. La somme de Riemann associée à ce découpage et à la fonction f est

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(D; f) &= A_{\mathcal{R}}(a, t_1, \ldots, t_{n-1}, b; r_1, \ldots, r_n; f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta t_i. \end{aligned}$$

Exemples pour $n = 4$





Intégrale de Riemann

Définition (Intégrabilité)

Une fonction f définie sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si pour toute suite de découpages de Riemann D_n $(n \in \mathbb{N})$ de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} L(D_n) = 0$, la suite $A_{\mathcal{R}}(D_n; f)$ tend vers une limite finie.

1. Convergence d'une suite de nombres : si $(c_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de nombres,
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$$
si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon.$$
2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors toutes les limites correspondant à tous les choix possibles de suites de découpages sont égales.

Intégrale de Riemann

Définition

Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors l'*intégrale de Riemann* de f sur $[a, b]$ la valeur commune

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} A_{\mathcal{R}}(D_n; f)$$

pour toute suite D_n de découpages telle que $\lim_{n\to+\infty} L(D_n) = 0$.

1. On omet généralement "Riemann" dans le vocabulaire usuel.
2. Il existe d'autres notions d'intégrales (par ex. Darboux, Lebesgue).
3. Dans l'expression $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t est dite muette. On peut écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Il existe des fonctions simples qui ne sont pas intégrables.

Définition

Dans un repère orthonormé, si f est intégrable sur $[a, b]$, alors l'aire algébrique définie par f entre les points a et b est $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un théorème et des exemples

Proposition

Toute fonction continue (ou monotone) sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Calcul de l'intégrale de la fonction constante définie par $f(x) = c$ pour tout $x \in [a, b]$.

- On définit D_n en posant $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$;
- On a $L(D_n) = \frac{b-a}{n}$;
- On pose $r_i = x_{i-1}$ (par exemple);

On obtient

$$A_{\mathcal{R}}(D_n; f) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c\,\frac{b-a}{n} = c(b-a).$$

Exemple II

Calcul de l'intégrale de la fonction définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

- Cette fonction est également intégrable;
- On considère la même suite D_n de découpages;

On obtient alors

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(D_n; f) &= \sum_{i=1}^{n} (a + i\,\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Cela donne finalement

$$\int_a^b x \,\mathrm{d}x = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

qui correspond bien à l'aire du trapèze de hauteur $b - a$ et de bases a et b quand $0 \leqslant a < b$.

Conventions et propriétés élémentaires

Définition

Pour tous $a < b \in \mathbb{R}$ et tout f, on pose
$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition (Linéarité, comparaison, sous-intervalles)

1. *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $k \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et kf aussi et*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (f)(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Si de plus $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*
3. *Si h est définie sur $[a,b]$ et si $c \in]a,b[$, alors h est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si h est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et on a*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Théorème fondamental

Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)

1. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $x_0 \in [a; b]$, alors*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   est une primitive de f sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$ (t.q. $F(x_0) = 0$).

2. *Pour toute primitive G de f sur $]a, b[$, on a $F(x) = G(x) - G(x_0)$, ou*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(x_0), \quad \forall x \in]a, b[.$$

3. *Si de plus $G \in C_0([a, b])$, l'égalité ci-dessus est vraie pour $x \in [a, b]$.*

Rem. : Si G n'est pas continue en a ou en b, on peut adapter l'énoncé :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [G]_a^b = \lim_{t \to b^-} G(t) - \lim_{t \to a^+} G(t).$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples I

1. Calcul de $\int_{-2}^{5} \frac{x^2+1}{3}\,\mathrm{d}x$.
   - La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
   - Une primitive de $\frac{x^2+1}{3}$ sur cet intervalle est donnée par $F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3}$.
   - On a donc
   $$\int_{-2}^{5} \frac{x^2+1}{3}\,\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{9} + \frac{x}{3}]_{-2}^{5} = (\frac{5^3}{9} + \frac{5}{3}) - (\frac{(-2)^3}{9} - \frac{2}{3}) = \frac{154}{9}.$$
2. Calcul de $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$.
   - La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
   - Une primitive de $f(x) = x$ sur cet intervalle est donnée par $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.
   - On a donc
   $$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}x^2]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$
3. On a
   $$\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3} + \ln(x)]_1^2 = \frac{7}{3} + \ln(2).$$

Exemples II

1. Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. C'est l'aire d'un demi-disque de rayon 1.
   - La fonction considérée est continue sur $[-1,1]$;
   - Nous avons calculé une primitive $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$;
   - On a donc
   $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}\arcsin(x)]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2}]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,(x)\,\mathrm{d}x$.
   - La fonction considérée est continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$donc intégrable;
   - Nous avons calculé une primitive $F(x) = -\ln(\cos(x))$ sur cet intervalle;
   - On a donc
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,(x)\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}).$$
3. Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.
   - La fonction considérée est continue sur $[0,\sqrt{3}]$;
   - Nous avons calculé par substitution une primitive $F(x) = \sqrt{1+x^2}$;
   - On a donc $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = [\sqrt{1+x^2}]_0^{\sqrt{3}} = 2-1 = 1$.

Exercices résolus

2.6 Calculer $\int_2^5 (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t$:

  0.1 On calcule d'abord une primitive $\int (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t = \int t^2 - 3\,\mathrm{d}t$

  0.2 On trouve directement $\int t^2 - 3\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 3t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

  0.3 On fait varier $\int_2^5 (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t = F(5) - F(2) = 30$

2.12 $\int_0^2 2xe^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$

  0.1 On calcule d'abord une primitive $F(x) = \int 2xe^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$,

  0.2 On trouve par substitution $F(x) = e^{(x^2)} + c$, $c \in \mathbb{R}$

  0.3 On calcule $F((2) - F(0)$ (la constante disparaît) et on trouve $e^4 - 1$

Exercices

Calculer les intégrales suivantes.

2.2 $\int_{-1}^{1}(x^3 - x^5)\,\mathrm{d}x$;

2.3 $\int_{1}^{e}(x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$;

2.7 $\int_{1}^{3}(x - \frac{1}{x})^2\,\mathrm{d}x$;

2.9 $\int_{0}^{a}(ax - x^2)\,\mathrm{d}x$;

2.10 $\int_{a}^{b} x^5\,\mathrm{d}x$;

2.11 $\int_{3}^{5} \frac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x$;

Exam Que vaut l'intégrale $\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$?

1) $\frac{1}{2}(e-1)$

2) $\frac{1}{4}(e^2-1)$

3) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

4) un autre nombre