

## Mathématique

### Primitives et intégrales

Pierre Mathonet

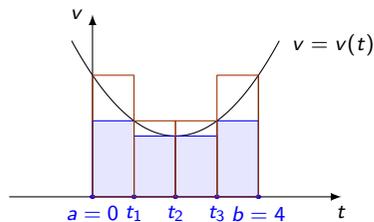
Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, automne 2019

### Un problème, deux solutions II

#### Solution 2 :

- On découpe l'intervalle de temps en morceaux (sous intervalles) où la vitesse est "à peu près constante".
- Sur chaque sous-intervalle, on mesure la différence de coordonnées (i.e. l'"espace parcouru"), à l'aide de la formule pour  $v$  constant.
- On fait la somme et on obtient une (des) approximation(s) de la réponse cherchée.
- On passe à la limite quand la largeur des sous-intervalles tend vers 0. Voici une **représentation de cette méthode** :



Dans un cas, on obtient une valeur trop grande pour  $x(4)$ , dans l'autre une valeur trop petite. On raffine le découpage, et on passe à la limite. On définit ainsi l'**intégrale**. **Les deux solutions doivent coïncider !**

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

### Un problème, deux solutions I

#### Problème

- Soit  $x(t)$  position au temps  $t$  d'un mobile sur un axe (en  $m$ ).
- La position en  $x(0) = x_0$ , et la vitesse  $v(t)$  (en  $m/s$ ) sont données.
- Trouver  $x(4)$ , et trouver  $x(u)$  pour tout  $u$ , dans les cas suivants :  $v(t) = 7$ ,  $v(t) = -3$ , ou  $v(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$ .

#### Solution 1 : Résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), & \forall t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

trouver  $x(t)$  pour tout  $t$ , puis  $x(4)$ .

Cette méthode consiste à trouver une **primitive** de  $v(t)$ , qui vaut  $x_0$  en 0.

2

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

### Primitives : définitions formelles

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ . On appelle **primitive** de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que

$$DF(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On dit alors que  $f$  est **primitivable sur  $I$** .

#### Remarques :

1. Il existe des fonctions qui ne sont pas primitivables;
2. Quand on dispose d'une primitive, elle n'est pas unique;
3. On peut étendre le problème à des fonctions définies sur des unions d'intervalles ouverts (par exemple  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ , définie sur  $\mathbb{R}_0$ );
4. On note souvent  $\int f(x) dx$  toute primitive de  $f$ , ou l'**ensemble de toutes** les primitives de  $f$  (sur  $I$ ).

**Exemples :** Des primitives de  $f(x) = x^2$ , sur  $I = \mathbb{R}$  sont données par les fonctions  $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ ,  $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ ,  $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 7, \dots$

4

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Propriétés

### Proposition

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]a, b[$ , alors pour toute constante  $c$ , la fonction  $F + c$  est une primitive de  $f$  sur  $]a, b[$ .

**Preuve :** Il suffit de dériver  $F + c$ .

### Proposition

Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur **un intervalle**  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $G = F + c$  sur  $]a, b[$ .

**Preuve :** La dérivée de  $F - G$  est nulle sur  $]a, b[$ .

### Proposition

Soient  $f$  une fonction primitivable sur  $]a, b[$ ,  $x_0 \in ]a, b[$  et  $r \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $]a, b[$  telle que  $F(x_0) = r$ .

**Preuve :** Ayant une primitive  $G$ , il suffit d'ajouter la bonne constante pour trouver  $F$ , c'est  $r - G(x_0)$ .

5

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Notation et quelques exemples

### Notation

Si  $F$  et  $G$  ont même domaine de dérivabilité, on note  $F \simeq G$  si  $F' = G'$ .

Sur un seul intervalle,  $F \simeq G \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$ . S'il y a plusieurs intervalles, il y a plusieurs constantes.

### Exemples de primitives :

1. On a  $\int x^m dx \simeq \frac{x^{m+1}}{m+1}$ , sur  $\mathbb{R}$ , si  $m$  est entier distinct de  $-1$ ;
2. On a  $\int \sin(x) dx \simeq -\cos(x)$ , sur  $\mathbb{R}$ ;
3. On a  $\int \cos(x) dx \simeq \sin(x)$ , sur  $\mathbb{R}$ ;
4. On a  $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \simeq \operatorname{tg}(x)$ , sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
5. On a  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \arcsin(x)$ , sur  $] -1, 1[$ ;
6. On a  $\int \frac{1}{1+x^2} dx \simeq \operatorname{arctg}(x)$ , sur  $\mathbb{R}$ .

Et nous reverrons bientôt

1. On a  $\int x^r dx \simeq \frac{x^{r+1}}{r+1}$ , sur  $]0, +\infty[$  si  $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;
2. On a  $\int \frac{1}{x} dx \simeq \ln(|x|)$ , sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ;
3. On a  $\int \exp(x) dx \simeq \exp(x)$ , sur  $\mathbb{R}$ ;

6

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Règles de calcul: combinaisons linéaires

Ces règles découlent des règles analogues pour les dérivées.

### Proposition (Combinaisons linéaires)

Si  $f, g$  sont primitivables sur  $]a, b[$  et  $r, s \in \mathbb{R}$ , alors  $rf + sg$  est primitivable sur  $]a, b[$  et

$$\int (rf + sg)(x) dx \simeq r \int f(x) dx + s \int g(x) dx$$

sur  $]a, b[$ .

### Exemples :

1.  $\int 3x^3 + 4x^2 + 1 dx \simeq 3 \int x^3 dx + 4 \int x^2 dx + \int 1 dx \simeq 3 \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} + x$ , sur  $\mathbb{R}$
2.  $\int \frac{3}{1+x^2} + x^5 dx \simeq 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int x^5 dx \simeq 3 \operatorname{arctg}(x) + \frac{x^6}{6}$  sur  $\mathbb{R}$

7

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Règles de calcul : primitivation par parties

**Idée :** Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $]a, b[$  alors

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg) \quad \text{sur } ]a, b[.$$

Vu dans le sens de la primitivation, cette formule donne le résultat suivant.

### Proposition

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I = ]a, b[$  et si  $fDg$  est primitivable sur  $I$  alors  $gDf$  est primitivable sur  $I$  et on a

$$\int g(x) Df(x) dx \simeq f(x)g(x) - \int Dg(x) f(x) dx, \quad \text{sur } ]a, b[.$$

**Exemple :** calcul de  $\int x \sin(x) dx$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pose  $g(x) = x$ ,  $Df(x) = \sin(x)$ .

On obtient  $Dg(x) = 1$ ,  $f(x) = -\cos(x)$ , donc

$$\int x \sin(x) dx \simeq -x \cos(x) + \int 1 \cos(x) dx \simeq -x \cos(x) + \sin(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

8

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Encore un exemple

Calculer la primitive  $\int x^2 \sin(3x) dx$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pose  $g(x) = x^2$ ,  $Df(x) = \sin(3x)$ .  
On obtient  $Dg(x) = 2x$ ,  $f(x) = -\frac{\cos(3x)}{3}$ , donc

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(3x) dx &\simeq -\frac{x^2 \cos(3x)}{3} - \int 2x \left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right) dx \\ &\simeq -\frac{x^2 \cos(3x)}{3} + \frac{2}{3} \int x \cos(3x) dx. \end{aligned}$$

On pose  $g(x) = x$ ,  $Df(x) = \cos(3x)$ .  
On obtient  $Dg(x) = 1$ ,  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{3}$ , donc,

$$\int x^2 \sin(3x) dx \simeq -\frac{x^2 \cos(3x)}{3} + \frac{2x \sin(3x)}{9} + \frac{2 \cos(3x)}{27}.$$

9

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Primitivation par substitution

- On regarde la formule  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .
- Une primitive du membre de droite est donnée par  $f \circ g$ .
- Si on veut primitiver une fonction du type  $f(g(x))g'(x)$ , il faut plutôt écrire  $(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)$ , si  $F'(x) = f(x)$ .

### Proposition (Primitivation par substitution)

Si  $f$  admet la primitive  $F$  alors

$$\int f(g(x))g'(x) dx \simeq F(g(x)) = \int f(u)du|_{u=g(x)}.$$

- **Applications** : repérer une fonction composée, multipliée par la dérivée de la fonction "interne" (à une constante près);
- **Notation** :
  1. On pose  $u = g(x)$  et  $du = g'(x) dx$
  2. On calcule  $F(u) \simeq \int f(u)du$
  3. On remplace  $u$  par sa valeur  $g(x)$ .

11

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## D'autres exemples classiques, mais étranges

1. Calculer  $\int \arctg(x) dx$ .

On pose  $g(x) = \arctg(x)$ ,  $Df(x) = 1$ .  
On obtient  $Dg(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $f(x) = x$ , donc

$$\begin{aligned} \int 1 \arctg(x) dx &\simeq x \arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\simeq x \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Vérier, en dérivant le résultat !

2. Trouver une primitive de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ , (sachant  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ) i.e. calculer  $\int \ln(x) dx$ .

On pose  $g(x) = \ln(x)$ ,  $Df(x) = 1$ .  
On obtient  $Dg(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = x$ , donc

$$\int 1 \ln(x) dx \simeq x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \simeq x \ln(x) - x.$$

Vérier, en dérivant le résultat !

10

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples

1. Calcul de la primitive  $\int 3 \cos(3x) dx$  sur  $\mathbb{R}$ .

- a) On pose  $u = 3x$  et on obtient  $du = 3dx$ ;
- b) On calcule  $\int \cos(u) du \simeq \sin(u)$ ;
- c) On remplace  $u$  par  $3x$ , donc  $\int 3 \cos(3x) dx \simeq \sin(3x)$
- d) On vérifie en dérivant !

2. Calcul de la primitive  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$  sur  $\mathbb{R}$  :

- a) On pose  $u = 1+x^2$  et on a  $du = 2x dx$ ;
- b) On remplace et on calcule  $\int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} du \simeq \sqrt{u}$ ;
- c) On remplace  $u$  par  $1+x^2$ , et on obtient  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \simeq \sqrt{1+x^2}$ .
- d) On vérifie en dérivant !

12

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples II

1. Calcul de la primitive  $\int \cos(x) \sin^3(x) dx$  sur  $\mathbb{R}$  :

- On pose  $u = \sin(x)$ , donc  $du = \cos(x)dx$ ;
- On remplace et on calcule  $\int u^3 du \simeq \frac{u^4}{4}$ ;
- On remplace la fonction  $u$  par sa valeur et on a

$$\int \cos(x) \sin^3(x) dx \simeq \frac{\sin^4(x)}{4}.$$

2. Calcul de  $\int \operatorname{tg}(x) dx$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :

- On doit calculer  $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$ ;
- On pose  $u = \cos(x)$ , donc  $du = -\sin(x)dx$ ;
- On remplace et on calcule  $-\int \frac{1}{u} du$ , pour  $u > 0$
- On a

$$\int \operatorname{tg}(x) dx \simeq \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \simeq -\int \frac{1}{u} du|_{u=\cos(x)} \simeq -\ln(\cos(x)).$$

- On montre que  $G(x) = -\ln(|\cos(x)|)$  est une primitive de la fonction tangente sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

13

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Primitivation par changement de variables

**Idée** : appliquer la primitivation par substitution, en créant une composée.

Si

- $f$  est définie sur  $]a, b[$ ;
- $g : ]a', b'[\rightarrow ]a, b[$  est une bijection;

alors on définit

$$f \circ g : ]a', b'[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f \circ g(t).$$

Réciproquement, si  $f$  est définie sur  $]a', b'[,$  alors on peut considérer

$$f \circ g^{-1} : ]a, b[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f \circ g^{-1}(t).$$

14

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Primitivation par changement de variables

### Proposition (Primitivation par changement de variables)

Si  $g : ]a', b'[\rightarrow ]a, b[$  est dérivable et si  $f : ]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$  est primitivable et admet la primitive  $F$ , alors

$$\int f(g(t))Dg(t) dt \simeq F \circ g, \quad \text{sur } ]a', b'[:$$

Si  $g$  est une **bijection dérivable** entre  $]a', b'[,$  et  $]a, b[,$  dont la dérivée ne s'annule pas sur  $]a', b'[,$  alors on a

$$\int f(x) dx \simeq F \simeq \left( \int f(g(t))Dg(t) dt \right) \circ g^{-1}, \quad \text{sur } ]a, b[:$$

**Notation** :

- On pose  $x = g(t)$  on a  $t = g^{-1}(x)$
- On calcule  $dx = Dg(t)dt$
- On remplace et on calcule la primitive obtenue
- On remplace  $t$  par sa valeur  $g^{-1}(x)$ .

15

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemple I

Calcul de la primitive  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  sur  $] -1, 1[$  :

On pose  $x = g(t) = \sin(t)$   $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On écrit  $dx = D(\sin(t)) dt = \cos(t)dt$

On doit donc calculer

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &\simeq \int \cos^2(t) dt \\ &\simeq \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \simeq \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}. \end{aligned}$$

Il reste à composer avec  $g^{-1}$ , i.e. remplacer  $t$  par sa valeur en fonction de  $x$  (on a  $t = \arcsin(x)$ ):

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \simeq \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}.$$

16

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemple II

Calculer  $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$ .

On pose  $x = \operatorname{tg}(t)$   $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$   
 On écrit  $dx = D(\operatorname{tg}(t)) dt = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$

On calcule sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2(t)}{(1+\operatorname{tg}^2(t))^3} \frac{1}{\cos^2(t)} dt \simeq \int \cos^4(t) \operatorname{tg}^2(t) dt \simeq \int \cos^2(t) \sin^2(t) dt.$$

On linéarise

$$\cos^2(t) \sin^2(t) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4t)).$$

17

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exercices résolus I

Pour chaque primitive, on regarde si elle est directe ou s'y ramène par calcul algébrique, si c'est une somme de primitives directes, si on peut le faire par substitution ou par parties. **On vérifie en dérivant le résultat.**

1.1  $\int (\frac{x}{2} + x^2 + \frac{x^3}{4}) dx = \frac{1}{2} \int x dx + \int x^2 dx + \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{16} + c, c \in \mathbb{R}$

1.5  $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + c, c \in \mathbb{R}$

1.6  $\int \sin(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + c, c \in \mathbb{R}$ . (directe ou poser  $u = kx$ )

1.13  $\int x \exp(x^2 + 1) dx$ . Substitution ou parties ? On a une fonction composée. Que pose-t-on ?

- 1) On pose  $u = x^2 + 1$ ;
- 2) On obtient  $du = 2x dx$  et on calcule  $\int \frac{1}{2} \exp(u) du \simeq \frac{1}{2} e^u$ .
- 3) On remplace  $u$  par  $x^2 + 1$  :  $\int x \exp(x^2 + 1) dx \simeq \frac{1}{2} e^{(x^2+1)}$ .

1.17  $\int \cos(x) \sqrt{3 + \sin(x)} dx$ . Même raisonnement.

- 1) On pose  $u = 3 + \sin(x)$ .
- 2) On a  $du = \cos(x) dx$
- 3) on calcule  $\int \sqrt{u} du \simeq \frac{2}{3} \sqrt{u^3}$
- 4) Donc  $\int \cos(x) \sqrt{3 + \sin(x)} dx \simeq \frac{2}{3} \sqrt{(3 + \sin(x))^3}$ .

19

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Finalement,

$$\int \cos^2(t) \sin^2(t) dt \simeq \frac{1}{8} \int (1 - \cos(4t)) dt \simeq \frac{t}{8} - \frac{1}{32} \sin(4t),$$

ou

$$\begin{aligned} \int \cos^2(t) \sin^2(t) dt &\simeq \frac{1}{8} (t - \sin(t) \cos^3(t) + \sin^3(t) \cos(t)) \\ &\simeq \frac{1}{8} (t + \frac{\operatorname{tg}^3(t) - \operatorname{tg}(t)}{(1 + \operatorname{tg}^2(t))^2}). \end{aligned}$$

On peut donc exprimer en fonction de  $x = \operatorname{tg}(t)$  (ou  $t = \operatorname{arctg}(x)$ ) :

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx \simeq \frac{1}{8} (\operatorname{arctg}(x) + \frac{x^3 - x}{(1+x^2)^2}).$$

Et on peut, encore une fois, vérifier en dérivant.

18

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exercices résolus II

Sup  $\int x \sin(2x) dx$ . Par substitution ou par parties ?

On pose  $g(x) = x, Df(x) = \sin(2x)$ .

On obtient  $Dg(x) = 1, f(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$ .

Donc

$$\int x \sin(2x) dx \simeq -\frac{x \cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx \simeq -\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}.$$

30  $\int \sin^2(x) dx$ . Formule de Carnot :  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ , donc

$$\int \sin^2(x) dx \simeq \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx \simeq \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}.$$

42 Que vaut la primitive  $\int \ln(x) dx$ , à une constante près, et sur  $]0, +\infty[$ ?

- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| 1) $-x + \ln(x)$  | 3) $-x + x \ln(x)$ |
| 2) $x - x \ln(x)$ | 4) $x - \ln(x)$    |

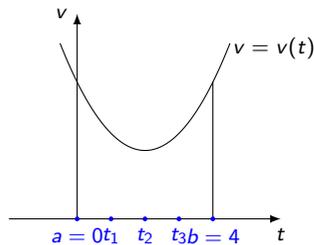
Dériver les solutions proposées, ou procéder par parties.

20

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Intégrale d'une fonction continue sur un fermé $[a, b]$

Revenons à la vitesse, continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , et formalisons la deuxième méthode de calcul.



### Définition

Un **découpage**  $D = [t_1, \dots, t_{n-1}]$  de l'intervalle  $[a, b]$  est la donnée de  $n - 1$  points  $t_1 < \dots < t_{n-1} \in ]a, b[$ . On pose  $a = t_0$  et  $b = t_n$ .

La **largeur de  $D$**  est  $L(D) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ .

On a donc  $n$  sous-intervalles :  $[t_{i-1}, t_i]$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

21 On veut calculer  $S = x(b) - x(a) = \sum_{i=1}^n (x(t_i) - x(t_{i-1}))$ .

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Approximations par excès et par défaut

Par le théorème des bornes atteintes,  $v$  admet sur  $[t_{i-1}, t_i]$

- minimum global, réalisé en un point  $m_i$ ;
- un maximum global, réalisé en un point  $M_i$ .

On définit la quantité

$$A_{\text{inf}}(t_0, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n v(m_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n v(m_i)\Delta t_i.$$

C'est une approximation par défaut de  $x(b) - x(a)$ . Cela correspond à la somme des aires des rectangles de  $[t_{i-1}, t_i]$  et de hauteur  $v(m_i)$ .

On définit aussi

$$A_{\text{sup}}(t_0, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n v(M_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n v(M_i)\Delta t_i.$$

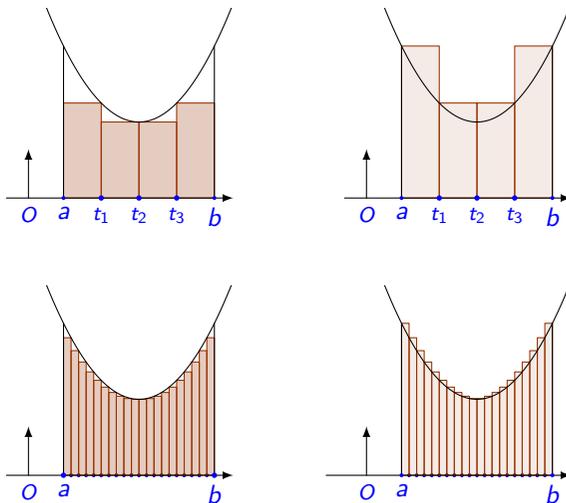
C'est une approximation par excès.

22

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples et interprétation

Les nombres  $A_{\text{inf}}$  et  $A_{\text{sup}}$  ont une **représentation** simple sur le graphique : ils correspondent à des sommes d'aires de rectangles.



23

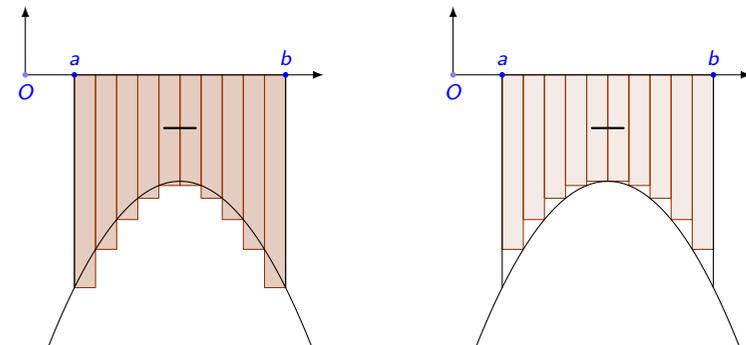
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Le cas de fonctions à valeurs négatives

Si la fonction est strictement négative sur l'intervalle  $[a, b]$ , on calcule les mêmes valeurs approchées :

$$A_{\text{inf}} = \sum_{i=1}^n v(m_i)(t_i - t_{i-1}), \quad A_{\text{sup}} = \sum_{i=1}^n v(M_i)(t_i - t_{i-1}),$$

Cela correspond à une somme d'aires, comptées négativement :

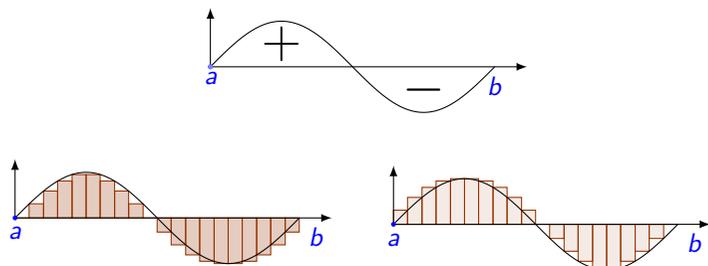


24

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## En général...

Quand  $f$  change de signe sur  $[a, b]$ , on calcule les mêmes quantités. Cela correspond à des aires, comptées positivement ou négativement, selon les cas :



On a donc les mêmes approximations  $A_{\text{inf}}$  et  $A_{\text{sup}}$ .

25

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Découpages de Riemann

L'idée :

- le choix de  $m_i$  dans  $[t_{i-1}, t_i]$  donne toujours une valeur trop petite pour l'aire;
- le choix de  $M_i$  donne une valeur trop grande;
- On fixe plutôt un nombre  $r_i$  dans chaque intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ .

### Définition

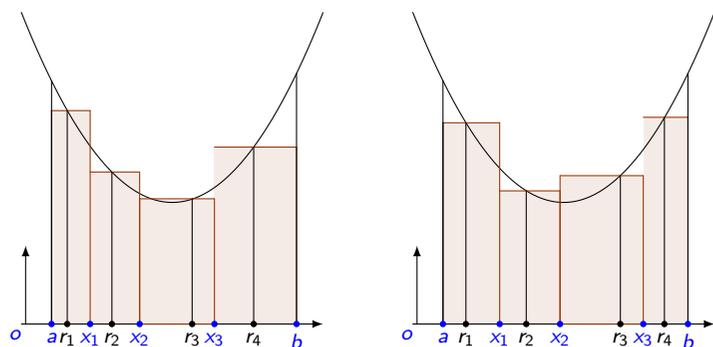
1. Un découpage de Riemann de l'intervalle  $[a, b]$  est la donnée d'un découpage  $[t_1, \dots, t_{n-1}]$  de  $[a, b]$  et de  $n$  points  $r_1, \dots, r_n$  tels que  $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$  pour tout  $i \leq n$ .
2. On note ce découpage  $D = [a, t_1, \dots, t_{n-1}, b; r_1, \dots, r_n]$
3. La largeur  $L(D)$  du découpage  $D$  est la largeur de  $[t_1, \dots, t_{n-1}]$ .
4. La somme de Riemann associée à ce découpage et à la fonction  $f$  est

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(D; f) &= A_{\mathcal{R}}(a, t_1, \dots, t_{n-1}, b; r_1, \dots, r_n; f) \\ &= \sum_{i=1}^n f(r_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(r_i)\Delta t_i. \end{aligned}$$

26

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples pour $n = 4$



27

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Intégrale de Riemann

### Définition (Intégrabilité)

Une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  si **pour toute suite** de découpages de Riemann  $D_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $[a, b]$  **telles que**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(D_n) = 0$ , la suite  $A_{\mathcal{R}}(D_n; f)$  tend vers une limite finie.

1. Convergence d'une suite de nombres : si  $(c_n, n \in \mathbb{N})$  est une suite de nombres,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |c_n - l| < \varepsilon.$$

2. Si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ , alors **toutes les limites** correspondant à tous les choix possibles de suites de découpages sont **égales**.

28

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Intégrale de Riemann

### Définition

Si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ , alors l'intégrale de Riemann de  $f$  sur  $[a, b]$  la valeur commune

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{\mathcal{R}}(D_n; f)$$

pour toute suite  $D_n$  de découpages telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(D_n) = 0$ .

1. On omet généralement "Riemann" dans le vocabulaire usuel.
2. Il existe d'autres notions d'intégrales (par ex. Darboux, Lebesgue).
3. Dans l'expression  $\int_a^b f(t) dt$ , la variable  $t$  est dite muette. On peut écrire  $\int_a^b f(x) dx$ .
4. Il existe des fonctions simples qui ne sont pas intégrables.

### Définition

29 Dans un repère orthonormé, si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , alors l'aire algébrique définie par  $f$  entre les points  $a$  et  $b$  est  $\int_a^b f(t) dt$ .

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemple II

Calcul de l'intégrale de la fonction définie par  $f(x) = x$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

- Cette fonction est également intégrable;
- On considère la même suite  $D_n$  de découpages;

On obtient alors

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(D_n; f) &= \sum_{i=1}^n \left( a + i \frac{b-a}{n} \right) \frac{b-a}{n} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Cela donne finalement

$$\int_a^b x dx = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

qui correspond bien à l'aire du trapèze de hauteur  $b - a$  et de bases  $a$  et  $b$  quand  $0 \leq a < b$ .

31

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Un théorème et des exemples

### Proposition

Toute fonction continue (ou monotone) sur un intervalle  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

Calcul de l'intégrale de la fonction constante définie par  $f(x) = c$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

- On définit  $D_n$  en posant  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ;
- On a  $L(D_n) = \frac{b-a}{n}$ ;
- On pose  $r_i = x_{i-1}$  (par exemple);

On obtient

$$A_{\mathcal{R}}(D_n; f) = \sum_{i=1}^n f(r_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c \frac{b-a}{n} = c(b-a).$$

30

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Conventions et propriétés élémentaires

### Définition

Pour tous  $a < b \in \mathbb{R}$  et tout  $f$ , on pose  $\int_a^a f(x) dx = 0$  et  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

### Proposition (Linéarité, comparaison, sous-intervalles)

1. Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $[a, b]$  et si  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $f + g$  et  $kf$  aussi et  $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ,  $\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .
2. Si de plus  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .
3. Si  $h$  est définie sur  $[a, b]$  et si  $c \in ]a, b[$ , alors  $h$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $h$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$  et on a

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^c h(x) dx + \int_c^b h(x) dx.$$

32

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Théorème fondamental

### Théorème (Théorème fondamental du calcul intégral)

1. Si  $f$  est une **fonction continue** sur  $[a, b]$  et si  $x_0 \in [a, b]$ , alors

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est **une primitive** de  $f$  sur  $]a, b[$ , continue sur  $[a, b]$  (t.q.  $F(x_0) = 0$ ).

2. Pour toute primitive  $G$  de  $f$  sur  $]a, b[$ , on a  $F(x) = G(x) - G(x_0)$ , ou

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = G(x) - G(x_0), \quad \forall x \in ]a, b[.$$

3. Si de plus  $G \in C_0([a, b])$ , l'égalité ci-dessus est vraie pour  $x \in [a, b]$ .

**Rem.** : Si  $G$  n'est pas continue en  $a$  ou en  $b$ , on peut adapter l'énoncé :

$$33 \quad \int_a^b f(t) dt = [G]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} G(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} G(t).$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples II

1. Calculer  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . **C'est l'aire d'un demi-disque de rayon 1.**

- La fonction considérée est continue sur  $[-1, 1]$ ;
- Nous avons calculé une primitive  $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$ ;
- On a donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \arcsin(x) \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [x \sqrt{1-x^2}]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) dx$ .

- La fonction considérée est continue sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  donc intégrable;
- Nous avons calculé une primitive  $F(x) = -\ln(\cos(x))$  sur cet intervalle;
- On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) dx = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Calculer  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

- La fonction considérée est continue sur  $[0, \sqrt{3}]$ ;
- Nous avons calculé par substitution une primitive  $F(x) = \sqrt{1+x^2}$ ;
- On a donc  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^{\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1$ .

35

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples I

1. Calcul de  $\int_{-2}^5 \frac{x^2+1}{3} dx$ .

- La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
- Une primitive de  $\frac{x^2+1}{3}$  sur cet intervalle est donnée par

$$F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3}.$$

- On a donc

$$\int_{-2}^5 \frac{x^2+1}{3} dx = \left[ \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3} \right]_{-2}^5 = \left( \frac{5^3}{9} + \frac{5}{3} \right) - \left( \frac{(-2)^3}{9} - \frac{2}{3} \right) = \frac{154}{9}.$$

2. Calcul de  $\int_a^b x dx$ .

- La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
- Une primitive de  $f(x) = x$  sur cet intervalle est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2.$$

- On a donc

$$\int_a^b x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

3. On a

$$34 \quad \int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \ln(x) \right]_1^2 = \frac{7}{3} + \ln(2).$$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exercices résolus

- 2.6 Calculer  $\int_2^5 (t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3}) dt$  :

0.1 On calcule d'abord une primitive  $\int (t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3}) dt = \int t^2 - 3 dt$

0.2 On trouve directement  $\int t^2 - 3 dt = \frac{t^3}{3} - 3t + c, c \in \mathbb{R}$ .

0.3 On fait varier  $\int_2^5 (t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3}) dt = F(5) - F(2) = 30$

- 2.12  $\int_0^2 2xe^{(x^2)} dx$

0.1 On calcule d'abord une primitive  $F(x) = \int 2xe^{(x^2)} dx,$

0.2 On trouve par substitution  $F(x) = e^{(x^2)} + c, c \in \mathbb{R}$

0.3 On calcule  $F(2) - F(0)$  (la constante disparaît) et on trouve  $e^4 - 1$

36

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exercices

Calculer les intégrales suivantes.

2.2  $\int_{-1}^1 (x^3 - x^5) dx;$

2.3  $\int_1^e (x + \frac{1}{x}) dx;$

2.7  $\int_1^3 (x - \frac{1}{x})^2 dx;$

2.9  $\int_0^a (ax - x^2) dx;$

2.10  $\int_a^b x^5 dx;$

2.11  $\int_3^5 \frac{x^2-4}{x-2} dx;$

**Exam** Que vaut l'intégrale  $\int_0^1 xe^{2x} dx$  ?

1)  $\frac{1}{2}(e - 1)$

3)  $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

2)  $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$

4) un autre nombre