Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Répétitions de géométrie
Bachelier en Sciences Physiques

Assistante : **Marie Kreusch**, B37, bureau 1/20 e-mail : M.Kreusch@ulg.ac.be
Professeur : **Pierre Mathonet**, B37, e-mail : P.Mathonet@ulg.ac.be

Année académique 2015–2016

A propos de ces notes

Ces notes constituent le support des répétitions données en parallèle du cours de géométrie (MATH0476-1) dispensé par le Professeur P. Mathonet aux étudiants du premier bloc au second semestre du grade de bachelier en sciences physiques de l'Université de Liège.

Le découpage du texte est inspiré de la structure du cours théorique. Chaque section comporte des exercices qui sont pour la plupart résolus durant les séances de répétitions. Pour chaque section, des exercices supplémentaires sont suggérés aux étudiants afin d'approfondir la matière, parmi ceux-ci figurent des énoncés d'examens d'années précédentes avec les solutions.

Ces notes sont en constante évolution et construction, de plus des "coquilles" peuvent subsister, c'est ainsi que toutes suggestions et commentaires afin d'améliorer celles-ci sont les bienvenus.

" Rien n'est permanent, sauf le changement " *Héraclite d'Ephèse, 500 A.J.C.*

1 Les espaces vectoriels

Exercice 1.1. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a \in E$. On définit les opérations suivantes :

$$\oplus : E \times E \longrightarrow E : (x, y) \mapsto x + y - a;$$

$$\circ : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot a.$$

Montrer que $(E, \oplus, \circ)$ est encore un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la combinaison linéaire $3v_1 - v_2$.
(b) Calculer la combinaison linéaire $r_1 v_1 + r_2 v_2$, pour $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
(c) Les vecteurs v_1, v_2 sont-ils linéairement indépendants ?
(d) Pour $v_3 = (4, m)^{\sim}$, déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs v_1, v_3 soient linéairement dépendants.
(e) Soit $v_4 = (10, 10)^{\sim}$. Les vecteurs v_1, v_2, v_4 sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 1.3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la combinaison linéaire $v_1 - v_2 + v_3$.
(d) Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont-ils linéairement indépendants ?
(c) Pour $v_4 = (6, 7, m)^{\sim}$, trouver m pour que les vecteurs v_1, v_2, v_4 soient linéairement dépendants.

Exercice 1.4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les combinaisons linéaires suivantes

(a) $v_1 + v_2 + v_3$
(b) $v_1 + 2v_2 - v_3 - v_4$
(c) $r_1 v_1 + r_2 v_2$ pour $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Solution :

$$(a) \begin{pmatrix} 7 \\ 10 + \pi \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 8 \\ 2\pi - \frac{5}{2} \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} r_1 + 4r_2 \\ 4r_1 + \pi r_2 \\ -3r_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5. On considère les vecteurs $x_1 = (1,2,3)^\sim$ et $x_2 = (-1,0,2)^\sim$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Construire un vecteur x_3 de $\mathbb{R}^3$ pour que x_1, x_2 et x_3 soient linéairement indépendants (resp. linéairement dépendants).

Exercice 1.6. Considérons les vecteurs linéairement indépendants a_1, a_2 et a_3 d'un espace vectoriel et définissons les vecteurs v_1, v_2 et v_3 par

$$\begin{cases} v_1 = a_1 + a_2 + a_3, \\ v_2 = a_1 - a_2 + a_3, \\ v_3 = a_1 + a_2 - a_3. \end{cases}$$

Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 1.7. Soit $\mathbb{R}_2[x] = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 sur $\mathbb{R}$. Sachant que $1, x, x^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[x]$ (voir cours théorique) montrer qu'il en est de même pour $1, x-a, (x-a)^2$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Décomposer un polynôme quelconque

$$Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0 \qquad , \ q_2, q_1, q_0 \in \mathbb{R}$$

dans la nouvelle base.

Exercice 1.8. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 de l'exercice 1.3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, décomposer le vecteur v_4 dans cette base.

Exercice 1.9. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne le vecteur $v = (1,2)^\sim$. Déterminer les équations paramétriques de l'enveloppe linéaire de v. Déterminer une équation cartésienne de cette enveloppe linéaire. Déterminer la condition sur $m \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $v' = (3,m)^\sim$ soit tel que v et v' soient linéairement dépendants.

Exercice 1.10. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, considérons l'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.11. Le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 1 \}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Même question pour

$$V_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y = a \}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Dans le cas où c'est un sous-espace vectoriel, le décrire comme une enveloppe linéaire. De plus, vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ est dans le sous vectoriel considéré avant.

Exercice 1.12. Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice donnée ci-dessous :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En fonction du paramètre α, que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant

$$\rangle \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle$$

et du nombre d'équation(s) cartésiennes indépendantes dont on a besoin pour décrire cet ensemble ?

Exercice 1.13. Calculer le déterminant de la matrice A en fonction des réels a et c.

$$A = \begin{pmatrix} a & c & c & -a \\ c & a & -a & c \\ c & -a & a & c \\ -a & c & c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.14. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Ecrire une/des équation(s) cartésienne(s) de l'enveloppe linéaire de v_1 et v_2.
– Ecrire une/des équation(s) cartésienne(s) de l'enveloppe linéaire de v_1 et v_3.
– Ecrire une/des équation(s) cartésienne(s) de l'enveloppe linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice 1.15. (*) Soit E un espace vectoriel et $f_1, \ldots, f_{p-1}, f_p$ des vecteurs de E où $p > 1$, montrer que si f_p est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_{p-1}$ alors

$$\rangle f_1, \ldots, f_p \langle \; = \; \rangle f_1, \ldots, f_{p-1} \langle$$

et en déduire la dimension de cette enveloppe linéaire.

Exercice 1.16. Dans un espace vectoriel E de dimension deux on se donne une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ et les vecteurs $v_1 = 2u_1 + u_2$ et $v_2 = u_1 - u_2$. Démontrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est également une base de E. Déterminer les composantes de u_1 et u_2 dans cette base. Exprimer les formules de changement de base entre ces deux bases.

Exercice 1.17. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ déterminer des équation cartésiennes de l'enveloppe linéaire du vecteur $v = (1, 2, 3)^\sim$. Faire de même avec le vecteur $v' = (2, 4, 0)^\sim$.

Solution :

$$(a) \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.18. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ déterminer une équation cartésienne de l'enveloppe linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)^\sim$ et $v_2 = (0, 0, 1)^\sim$. Faire de même avec l'enveloppe linéaire des vecteurs v_3 et v_4 donnés par $v_3 = (1, 0, 1)^\sim$ et $v_4 = (-1, 1, 0)^\sim$. Déterminer dans chaque cas la dimension de cette enveloppe linéaire.

Solution : $2x = y$ et $z - y - x = 0$.

Exercice 1.19. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ munit de la base canonique, déterminer des équations paramétriques et cartésiennes de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercices proposés

Exercice 1.20. (juin 2006)

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les quatre vecteurs suivants :

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que (w, x) et (y, z) sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, puis construire la matrice de changement de base pour passer de la première à la seconde. Utiliser cette matrice de changement de base pour obtenir les composantes du vecteur $2w + 3x$ dans la base (y, z).

Solution : Pour passer de la base (w, x) à la base (y, z) on utilise la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour passer de la base (y, z) à la base (w, x) on utilise la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

De plus, $v = -12y + 7z$.

Exercice 1.21. (Partiel à blanc, décembre 2007)

On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur le paramètre complexe α, ces trois vecteurs sont-ils indépendants ?

Solution : $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$.

Exercice 1.22. (Interrogation dispensatoire, janvier 2008)

Soient u, v, w trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. Les vecteurs

$$x_1 = u + v \;, \quad x_2 = u - 2v + w \;, \quad x_3 = v - w \;, \quad x_4 = 3u + 2v + w$$

sont-ils linéairement indépendants ? Pourquoi ?

Solution : Les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants car si on considère une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_3 x_4 = 0,$$

on obtient un système d'équations qui admet pour solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-3\alpha, 0, \alpha, \alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Ces quadruples ne sont pas tous nuls.

Exercice 1.23. Déterminer si les polynômes P, Q et R sont linéairement indépendants dans $\mathcal{P}$, dans les cas suivants :

i) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $Q(x) = x^3 - x^2 + 8x + 2$ et $R(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 5$.

ii) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, $Q(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$ et $R(x) = 3x^3 + 8x^2 - 8x + 7$.

Solution : Dans le cas i) ils sont L.I. et ils sont L.D. dans le cas ii).

Exercice 1.24. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = 0\} \\ G = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : XA = 0\} \\ H = \{X \in \mathbb{R}_2^2 : AX = XA\} \end{cases}$$

Monter que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de dimension 2. Préciser une base et leur dimension.

2 Espaces affines, combinaisons affines, équations de variétés affines

Exercice 2.1. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, on considère un parallélogramme $ABCD$. Pour chacune des expressions suivantes déterminer la nature de l'objet indiqué (point, vecteur, non défini) et le représenter :

(a) $2A + B - C - D$

(b) $-2A + 2B + C - D$

(c) $A - B + C + 2D$

(d) $A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C + D$

Exercice 2.2. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, démontrer que si $ABCD$ est un parallélogramme dans un espace affine $\mathcal{A}$ alors il en est de même pour $ADCB$.

Exercice 2.3. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si le milieu de $[A, C]$ est égal au milieu de $[B, D]$.

Exercice 2.4. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, démontrer que dans un triangle ABC les médianes sont concourantes.

Exercice 2.5. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, montrer que les droites joignant chacune le milieu d'une arête d'un tétraèdre au milieu de l'arête opposée sont concourantes. Identifier le point commun.

Exercice 2.6. Dans un espace affine $\mathcal{A}$, démontrer que le segment déterminé par les milieux d'un côté d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Exercice 2.7. Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3 muni d'un repère, on considère les points A, B, C définis par leurs coordonnées

$$A : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B : \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les coordonnées du point $D = 4A - 3C$,

(b) Déterminer les coordonnées du milieu de $[A, B]$,

(c) Ecrire des équations cartésiennes de la droite AB.

(d) Démontrer que les points A, B et C sont alignés,

Exercice 2.8. Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension deux muni d'un repère, on donne les points A, B, C, D définis pas leurs coordonnées

$$A : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B : \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad D : \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une équation cartésienne de la droite AB et de la droite CD.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$, parallèle à BC passant par A.

(c) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.

(d) Déterminer les coordonnées du symétrique de A par rapport à B.

Exercice 2.9. Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois muni d'un repère, on considère les points A, B, C, D définis pas leurs coordonnées

$$A : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

et un vecteur u dont les composantes sont $u : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Ecrire des équations cartésiennes de la droite AB.

(b) Ecrire des équations paramétriques pour le segment $[C, D]$.

(c) Ecrire des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ contenant C et de vecteur directeur u. Cette droite est-elle parallèle à AB ?

Exercice 2.10. Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, écrire une équation du plan passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 3)^\sim$ et de sous-vectoriel directeur $\rangle u, v\langle_l$, où le vecteur u (resp. v) a pour composantes $(2, 1, 0)^\sim$ (resp. $(2, 4, 6)^\sim$).

Exercice 2.11. Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois muni d'un repère, on donne la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 2 \\ y + z & = & 1 \end{array} \right.,$$

le point P de coordonnées $(2, 1, 0)^\sim$ et le vecteur u de composantes $(3, 2, 1)^\sim$.

(a) Ecrire une équation du plan π déterminé par $\mathcal{D}$ et P.

(b) Ecrire une équation du plan π' contenant $\mathcal{D}$ et dont u est un vecteur directeur.

Exercice 2.12. Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois muni d'un repère, on donne les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ 3x - 2y + 1 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 3 \\ 2x - y + z & = & 1 \end{array} \right.$$

(a) Démontrer que ces droites sont gauches.

(b) Si P est le point de coordonnées $(1, 2, 3)^\sim$, écrire une équation cartésienne du plan déterminé par $\mathcal{D}$ et P.

(c) Ecrire des équations cartésiennes de la droite qui coupe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et qui contient P, en ayant démontré préalablement qu'une telle droite existe.

(d) Soit $\mathcal{D}''$ une droite dont un vecteur directeur est donné par u de composantes $(1, 2, 3)^\sim$. Ecrire des équations cartésiennes de la droite qui coupe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et qui est parallèle à $\mathcal{D}''$, en ayant démontré préalablement qu'une telle droite existe.

Exercices proposés

Exercice 2.13. (juin 2006)

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3 muni d'un repère, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & -2 \\ y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Vérifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont gauches et donner l'équation cartésienne ainsi qu'un vecteur directeur de la droite passant par le point de coordonnées $(1,-1,1)^\sim$ et s'appuyant sur les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Solution : La droite a pour équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ x-y-3z+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.14. (janvier 2007)

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3 muni d'un repère, on considère les droites les points A, B, C de coordonnées respectives $(1,2,0)^\sim$, $(3,-1,1)^\sim$ et $(2,2,0)^\sim$ ainsi que et le vecteur u de composantes $(-1,1,2)^\sim$.

(a) Donner des équations cartésiennes de la droite AC.

(b) Donner des équations cartésiennes de la droite $B+\rangle u\langle$.

(c) Quelles sont les positions relatives des deux droites obtenues aux points précédents ? (sécantes, parallèles, gauches).

(d) Donner l'équation cartésienne d'un plan passant par A et B et parallèle à u.

(e) Donner, si possible, des équations cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites AC et $B+\rangle u\langle$ et passant par le point de coordonnées $(4,4,0)^\sim$. Si la construction n'est pas possible, justifier.

(f) Donner, si possible, des équations cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites AC et $B+\rangle u\langle$ et passant par le point de coordonnées $(6,4,-1)^\sim$. Si la construction n'est pas possible, justifier.

Solution : (a)

$$AC \equiv \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

(b) $B+\rangle u\langle \equiv 3-x = y+1 = \frac{z-1}{2}$, (c) Les deux droites sont gauches, (d) Le plan a pour équation $-7x-5y-z+17=0$, (e)

$$d \equiv \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ -11x+y-6z+40 & = & 0 \end{array}\right.$$

(f)

$$d \equiv \left\{\begin{array}{rcl} y+2z-2 & = & 0 \\ -3x+y-2z+12 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.15. (janvier 2008)

Dans un plan affine, on considère un ensemble $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de quatre points formant un parallélogramme. On définit quatre autres points B_1, B_2, B_3, B_4, où, pour $i = 0, \ldots, 4$, B_i est le centre de gravité du triangle formé des trois points de $\mathcal{C}$ sauf A_i. Montrer que les centres de gravité des quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ coïncident.

Exercice 2.16. (janvier 2008)

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3 muni d'un repère, on considère les droites les points A, B, C de coordonnées respectives $(1,0,2)^\sim$, $(2,-1,1)^\sim$ et $(1,1,-1)^\sim$ et le vecteur u de composantes $(1,2,0)^\sim$.

(a) Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B et C.

(b) Donner des équation cartésienne de la droite AB.

(c) Donner des équations cartésienne de la droite $\mathcal{D} = C + \rangle u \langle$.

(d) Donner, si possible, des équations cartésiennes d'une droite s'appuyant sur AB et $\mathcal{D}$ et parallèle au vecteur de composantes $(-1, -2, 3)^{\sim}$. Justifier l'existence de la droite éventuellement construite.

Solution : (a) Le plan a pour équation $4x + 3y + z - 6 = 0$, (b)

$$AB \equiv \begin{cases} x + y - 1 &= 0 \\ y - z + 2 &= 0 \end{cases}$$

(c)

$$C + \rangle u \langle \equiv \begin{cases} z &= -1 \\ 2x - y &= 1 \end{cases}$$

(d)

$$d \equiv \begin{cases} 5x + 2y + 3z - 11 &= 0 \\ 2x - y - 1 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2.17. (juin 2009)

Soient $\mathcal{A}$ un espace affine construit sur un espace vectoriel E et A, B, C trois points de $\mathcal{A}$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel x, l'expression

$$(1 - x)A + x^2 B - xC$$

(a) représente-t-elle un point de $\mathcal{A}$?

(b) représente-t-elle un vecteur de E ?

Solution : (a) $x = 0$ ou $x = 2$, (b) $x = 1$.

Exercice 2.18. (juin 2009)

Dans un plan affine $\mathcal{A}$, on considère un triangle ABC et une parallèle à BC ne passant ni par A ni par B et coupant respectivement les segments $[A, B]$ en B' et $[A, C]$ en C'. Montrer que la droite passant par A et par l'intersection des droites BC' et CB' coupe les segments $[B, C]$ et $[B', C']$ en leur milieu.

Exercice 2.19. (mai 2010)

Dans un espace affine de dimension 2 muni d'un repère $(O, (e_1, e_2))$, on considère quatre points A, B, C, D. Si u et v sont deux vecteurs de composantes respectives (u_1, u_2) et (v_1, v_2), on note

$$\det(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que $\det(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + \det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) + \det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(b) En déduire que A, B, C sont alignés si et seulement si pour tout point P, on a $\det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) + \det(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) + \det(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PC}) = 0$.

Exercice 2.20. (juin 2011, Ingénieurs)

Dans un plan affine $\mathcal{A}$, on considère des points A, B, C, D, E et F. On note P, Q, R, S, T et U les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, E]$, $[E, F]$ et $[F, A]$. Montrer que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = 0.$$

3 Espaces vectoriels euclidiens

Exercice 3.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère l'application

$$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) \mapsto 6zx + 2tx + 2yz + 3ty.$$

(a) Démontrer que l'application B définit un produit scalaire ;

(b) Déterminer l'ensemble des vecteurs perpendiculaires à $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(c) Déterminer la norme de u ;

(d) Déterminer une base orthonormée dont le premier vecteur est un multiple de u.

Exercice 3.2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3. On se donne les vecteurs v_1, v_2, v_3 par leur composantes dans cette base :

$$v_1 : (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \qquad v_2 : (0, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad v_3 : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0).$$

(a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est encore une base orthonormée.

(b) Calculer les composantes de $u = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 - e_3$ dans cette nouvelle base.

(c) Déterminer l'angle non orienté entre $v_1 + v_2$ et v_1 et entre $v_1 + v_2$ et v_3.

Exercice 3.3. Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée, on donne les vecteurs v_1, v_2 et v_3 par leurs composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Déterminer a, b, et c pour que ces trois vecteurs forment une base orthonormée (positive). Donner une équation cartésienne de l'enveloppe linéaire de v_1 et v_2.

Exercice 3.4. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, noté E, démontrer l'identité de *Jacobi* :

$$(a \wedge b) \wedge c + (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b = 0 \quad \forall a, b, c \in E.$$

Exercice 3.5. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormée positive, déterminer l'angle orienté θ entre les vecteurs a et b de composantes respectives $(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ et $(2, \frac{2}{3}\sqrt{3})$.

Exercice 3.6. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée positive, on donne les vecteurs a et b de composantes respectives

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les composantes de $a \wedge b$ et $(a \wedge b) \wedge a$ ainsi que le scalaire $\langle a, b \rangle$.

Exercice 3.7. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois muni d'une base orthonormée positive, on donne les vecteurs u et v de composantes respectives

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel. Déterminer pour quelle valeur de a l'équation $u \wedge x = v$ admet des solutions et résoudre cette équation.

Exercice 3.8. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$, démontrer que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(|u+v|^2 - |u-v|^2\right),$$

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|} \leq \frac{|u|}{1+|u|} + \frac{|v|}{1+|v|} \qquad \text{et} \qquad 1+|u+v|^2 \leq 2\left(1+|u|^2\right)\left(1+|v|^2\right).$$

Exercices proposés

Exercice 3.9. (a) Si u et v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ différents de 0, démontrer que

$$\left|\frac{u}{|u|^2} - \frac{v}{|v|^2}\right| = \frac{|u-v|}{|u||v|}.$$

(b) En déduire que pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^d$: $|u||v-w| \leq |v||w-u| + |w||u-v|$

Exercice 3.10. (décembre 2010, Mathématique)

Soit E un espace vectoriel euclidien, montrer que si $u \in E$ est de longueur 1, alors $\forall v, w \in E$ on a $|(u \wedge v) \wedge (u \wedge w)| = |[u, v, w]|$

Exercice 3.11. (juin 2011, Ingénieurs)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard, pour quelles(s) valeur(s) de r, l'angle non orienté entre les vecteurs $v = (1,1,1)\tilde{}$ et $(1,r,1)\tilde{}$ vaut-il $\pi/3$?

<u>Solution :</u> $r = -8 + 3\sqrt{6}$

Exercice 3.12. (août 2011, Ingénieurs)

On considère des éléments u, v d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Calculer

$$[u, u \wedge v, u \wedge (u \wedge v)]$$

sachant que $|u| = 1$, $|v| = 2$ et que l'angle non orienté entre u et v est $\pi/6$.

<u>Solution :</u> 1

Exercice 3.13. (juin 2009)

Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormée positive, on considère les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'angle <u>orienté</u> entre u et v.

<u>Solution :</u> $\frac{7\pi}{6}$

Exercice 3.14. (mai 2010)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on donne le vecteur u de composantes $(1,1)$. Déterminer les composantes de v sachant que $|v| = 2$ et que l'angle orienté déterminé pas (u,v) vaut $\pi/3$.

Solution : $v = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3.15. (juin 2011)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on donne le vecteur u de composantes $(1,1)$. Déterminer les composantes de v sachant que $|v| = 3$ et que l'angle orienté déterminé pas (u,v) vaut $5\pi/6$.

Solution : $v = \frac{3}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3.16. (septembre 2011)

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

(a) Soient i, j deux vecteurs unitaires orthogonaux et $k = i \wedge j$. Démontrer que pour tout vecteur $u \in E$, on a
$$i \wedge (u \wedge i) + j \wedge (u \wedge j) + k \wedge (u \wedge k) = 2u.$$

(b) Démontrer que pour tous vecteurs w, x, y, z on a
$$\langle w \wedge x, y \wedge z\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle w,y\rangle & \langle w,z\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle \end{pmatrix}.$$

4 Espaces affines euclidiens

Exercice 4.1. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on donne les droites gauches $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par les équations

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - 2y & = & -1 \\ y - 3z & = & 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & z \\ 2x - 3y & = & 2 \end{array} \right.$$

Déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 4.2. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, donner des équations cartésiennes du plan π satisfaisant les conditions suivantes

(a) π contient le point $P : (1, 3, -2)^{\sim}$,

(b) π est parallèle à la droite d d'équations $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$

(c) π est perpendiculaire au plan d'équation $2x - 3y + 2z = 1$.

Exercice 4.3. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on donne un point $P : (1, 2, 3)^{\sim}$ un plan $\pi \equiv 2x - 3y + z = 2$ et une droite

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 3y + z & = & 2 \\ 2y - z - 2 & = & 0. \end{array} \right.$$

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan π' contenant P et orthogonal à $\mathcal{D}$

(b) Déterminer des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}'$ contenant P et orthogonale à π.

Exercice 4.4. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, déterminer des équations cartésiennes de la droite symétrique orthogonale par rapport à $\pi \equiv x + y - z = 0$ de la droite

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y + z - 1 & = & 0 \\ 2y - z - 2 & = & 0. \end{array} \right.$$

Exercice 4.5. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on donne les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 1 & = & 0 \\ x - z - 1 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y - 7 & = & 0 \\ x - z + 1 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

le plan $\pi \equiv x - 2y + 3z = 2$ et le point $P : (1, 2, 3)^{\sim}$.

(a) Déterminer la distance de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$;

(b) Déterminer l'angle de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$;

(c) Déterminer la distance de P à $\mathcal{D}$;

(d) Déterminer la distance de P à π ;

(e) Déterminer l'angle de $\mathcal{D}$ et π.

Exercice 4.6. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on demande des équations cartésiennes

(a) de la droite passant par le point de coordonnées $(1, 0, 1)^{\sim}$ et parallèle à la droite

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z & = & 1 \\ x - 3y + 3z & = & 2 \end{array} \right. ;$$

(b) du plan orthogonal à d et contenant le point de coordonnées $(1, 2, 3)^{\sim}$;

(c) du plan médiateur du segment $[C, D]$ où $C : (-2, 1, 4)^{\sim}$ et $D : (4, -3, 2)^{\sim}$.

Exercice 4.7. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère deux droites perpendiculaires d et d'. On donne deux points distincts A et B appartenant à d et pas à d'. Soit M un point de d'. Par A on mène la perpendiculaire d_1 à AM et par B, on mène une perpendiculaire d_2 à BM. Rechercher une équation cartésienne du lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et d_2 quand M parcourt d'.

Exercice 4.8. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, quel est le lieu des points équidistants à deux droites gauches ?

Exercice 4.9. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, déterminer le lieu de la projection orthogonale d'un point P sur un plan π qui pivote autour d'une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas P.

Solution : Le lieu est un cercle dans le plan π qui est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ est contenant le point P. Le diamètre du cercle est déterminé par P et sa projection sur $\mathcal{D}$.

Exercice 4.10. On considère un repère orthonormé dont on désigne l'axe des abscisses par d_1 et celui des ordonnées par d_2. On donne un point A n'appartenant ni à d_1 ni à d_2 et on mène par ce point une droite variable d qui coupe d_1 en B. On désigne par P le point de d_2 dont l'ordonnée est égale à l'abscisse de B. Rechercher le lieu de la projection orthogonale de P sur la droite d. Préciser la nature de ce lieu et ses caractéristiques géométriques.

Exercices proposés

Exercice 4.11. (juin 2009)

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le plan π d'équation $x + y - z = 5$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A de coordonnées $(-1, 0, 2)^{\sim}$ et de vecteur directeur de composantes $(2, 3, 1)^{\sim}$.

(a) Donner des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$.

(b) Donner une équation cartésienne du plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point de coordonnées $(5, 2, 1)^{\sim}$.

(c) Donner les coordonnées de la projection orthogonale du point B de coordonnées $(-4, -1, 4)^{\sim}$ sur le plan π. Calculer la distance de π à B.

(d) Donner les équations cartésiennes de la droite obtenue à partir de la droite $\mathcal{D}$ par symétrie orthogonale par rapport à π.

Solution : (a)

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2z + 5 & = & 0 \\ y - 3z + 6 & = & 0 \end{array} \right.$$

(b) $\alpha \equiv -5x + 8y - 14z + 13 = 0$ (c) $d(B, \pi) = \frac{14}{3}\sqrt{3}$.

Exercice 4.12. (mai 2010)

Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ d'équations respectives

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2y + z & = & 3 \\ x - y + 2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 3z & = & 1 \\ -x - 3y & = & 2. \end{array} \right.$$

(a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{E}$.

(b) Donner les positions relatives des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$. en particulier, sont-elles orthogonales ?

(c) On fixe un point M_α de $\mathcal{E}$ dépendant du paramètre α, où α est l'abscisse (i.e., la première coordonnée) du point M_α. Donner l'équation du plan π_α passant par M_α et contenant $\mathcal{D}$.

(d) Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à $\mathcal{E}$? Si oui, pour quelle valeur α_0 de α est-il obtenu ? Donner une équation de ce plan et donner les coordonnées du point M_α.

(e) Donner le symétrique orthogonal du point P de coordonnées $(9,1,-1)^\sim$ par rapport au plan d'équation $3x+y+z=5$.

Solution : (a) Par exemple $(-3,-1,1)^\sim$, (b) sécantes, (c) $\pi_\alpha \equiv (12+\alpha)x+(4+7\alpha)y+(8+4\alpha)z=10\alpha$, (d) $\alpha_0=-12/11$, (e) $(-3,-3,-5)^\sim$.

Exercice 4.13. (juin 2011)

Dans un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, H et B de coordonnées respectives $(1,-2)^\sim$, $(4,0)^\sim$ et $(10,4)^\sim$. Déterminer les coordonnées des points C tels que le triangle ABC soit rectangle en C et que H soit le pied de la hauteur issue de C.

Solution : Les coordonnées de C sont $(-2\sqrt{2}+4, 3\sqrt{2})^\sim$ et $(2\sqrt{2}+4,-3\sqrt{2})^\sim$

Exercice 4.14. (juin 2011)

Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\mathcal{D} \equiv \begin{cases} 2y+z &= 3 \\ x-y+2 &= 0 \end{cases}$$

et la famille de plan π_α (α est un paramètre réel) d'équation $\alpha x+2y-z=\alpha$.

(a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

(b) Pour quelle valeur du paramètre α, le plan π_α est-il parallèle à la droite $\mathcal{D}$? Dans ce cas, la droite est-elle strictement parallèle à π_α ou incluse dans ce plan ?

(c) On considère le point P de coordonnées $(0,2,3)^\sim$. Donner en fonction de α la distance de P à π_α. Pour quelle valeur de α cette distance est-elle minimale ?

(d) Donner les équations du symétrique orthogonal par rapport au plan $\pi_1 \equiv x+2y-z=1$ de la droite passant pas le point Q de coordonnées $(2,1,-1)^\sim$ et de vecteur directeur de composantes $(2,3,8)^\sim$.

Solution : (a) Par exemple $(1,1,-2)^\sim$, (b) pour $\alpha=-4$ et la droite n'est pas incluse dans le plan. (c)

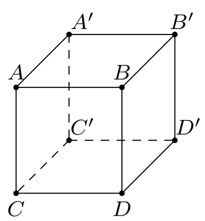
$$d(\alpha)=\frac{|1-\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+5}}$$

la distance est minimale pour $\alpha=1$. (d)

$$d \equiv \frac{x-2/3}{2}=\frac{y+5/3}{3}=\frac{z-1/3}{8}$$

Exercice 4.15. (septembre 2011)

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, on considère le cube représenté ci-dessous.



(a) Montrer que les plans $A'CD'$ et $AB'D$ sont parallèles.

(b) Montrer que la droite $C'B$ est perpendiculaire au plan $A'CD'$.

(c) Si T est la projection orthogonale de B sur $A'CD'$, exprimer $d(C',T)$ en fonction de $d(C',B)$.

Exercice 4.16. (septembre 2011)

Dans le plan affine euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A et une droite $\mathcal{D}$ passant par A. On note E la projection orthogonale de C sur $\mathcal{D}$. On note G le projection orthogonale de B sur $\mathcal{D}$. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite passant par G et parallèle à AC et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par E et parallèle à AB. Montrer que les droites BC, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes.

Exercice 4.17. (septembre 2011)

Soit a un paramètre réel. Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}_a$ d'équations

$$\begin{cases} x &= ay \\ y &= az \end{cases}$$

et le plan π_a perpendiculaire à $\mathcal{D}_a$ et contenant le point de coordonnées

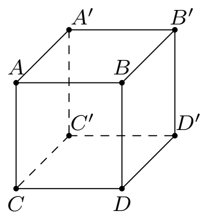
$$(a+1, 2-2a^2, a^3+1)^{\sim}.$$

Montrer que la famille de plans $(\pi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ ont une intersection et caractériser celle-ci.
Suggestion : considérer l'intersection de 3 plans quelconques de la famille.

Solution : Le point de coordonnées $(1,2,1)^{\sim}$ appartient à tous les plans π_a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.18. (juin 2014)

Dans un espace affine euclidien de dimension 3, on considère le cube (dont la longueur du côté vaut $a > 0$) représenté ci-dessous.



(a) Démontrer que la droite CB' est orthogonale au plan $AC'D$.

(b) Déterminer la projection orthogonale P de B' sur $AC'D$. Caractériser ce point en fonction des points A, C' et D.

(c) Calculer la distance des droites CB' et DD' en fonction de la longueur du côté du cube.

5 Les courbes

Exercice 5.1. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe donnée par

$$P(u) = e^u(\cos(u), \sin(u), 1)^\sim, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

(a) S'agit-il d'un arc régulier de courbe ?

(b) Calculer les composantes du trièdre de Frenet en tout point.

(c) Déterminer un paramétrage naturel de la courbe.

(d) Calculer la courbure et la torsion en un point $P(s)$ où s est l'abscisse curviligne.

Exercice 5.2. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et des points diamétralement opposés O et A de $\mathcal{C}$. On note d et d' les tangentes à $\mathcal{C}$ en O et A respectivement. Si P est sur d', la droite OP coupe $\mathcal{C}$ en un second point Q. La parallèle à d menée par Q et la perpendiculaire à d menée par P se coupent en M.

(a) Trouver une représentation paramétrique de la trajectoire de M quand P bouge sur d'.

(b) S'agit-il d'un arc régulier ?

(c) Montrer que les points de l'arc en lesquels la courbure s'annule sont ceux pour lesquels l'angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ vaut $\pi/6$.

Exercice 5.3. (juin 2014)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2, orienté et muni d'un repère orthonormé positif $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2))$. Considérons la fonction

$$P :]0, \pi[\to \mathcal{A} : u \mapsto (\sin(u), \cos(u) + \ln(\tan(u/2)))^\sim$$

(a) La fonction P définit-elle un paramétrage d'un arc régulier de courbe dans $\mathcal{A}$?

(b) Dans le cas d'un paramétrage d'un arc régulier de courbe, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ tangente à Γ en un point $P(u)$.

(c) On note $Q(u)$ le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ (trouvée au point (b)) avec l'axe des ordonnées. Montrer que le segment $[P(u), Q(u)]$ est de longueur 1.

Exercice 5.4. (août 2013)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 3, euclidien et orienté muni d'un repère orthonormé positif $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2, e_3))$. Considérons la fonction

$$P : \mathbb{R} \to \mathcal{A} : u \mapsto P(u) : (e^u, e^u, u\sqrt{2})^\sim,$$

où les coordonnées sont données dans le repère $\mathcal{R}$.

(a) Montrer que $(\mathbb{R}, P)$ est un paramétrage d'un arc régulier de courbe Γ.

(b) S'agit-il d'un paramétrage naturel de l'arc régulier de courbe Γ ?

(c) Donner le vecteur de la tangente unitaire.

(c) Donner des équations de la droite tangente à la courbe en le point $P(1)$.

Exercices proposés

Exercice 5.5. (Ingénieurs 2009)

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathbf{t}$ la tangente unitaire d'un arc régulier de courbe paramétré par une abscisse curviligne.

(a) Calculer le produit mixte $[\mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{t}}]$

(a) Calculer l'expression $\mathbf{t} \wedge (\dot{\mathbf{t}} \wedge \ddot{\mathbf{t}}) - (\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}}) \wedge \ddot{\mathbf{t}}$

(a) Montrer que $\dot{\kappa} = \ddot{\mathbf{t}}.\mathbf{n}$

au moyen de la torsion τ, de la courbure κ (supposée non nulle) de l'arc et de $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$.

Exercice 5.6. (juin 2009)

Soient trois nombres réels $R, r, d > 0$, tels que $R > r$. dans le plan affine euclidien, on considère une *hypotrochoïde* de paramétrage :

$$P(u) : \left((R - r)\cos(u) + d\cos\left(\frac{R-r}{r}u\right), (R - r)\sin(u) - d\sin\left(\frac{R-r}{r}u\right) \right)^{\sim}.$$

(a) Pour $d = 2$, $R = 6$, $r = 2$ et $u \in]0, 2\pi[$:
- S'agit-il d'un arc régulier de courbe ?
- S'il s'agit en fait d'une union d'arcs réguliers de courbe, quels point de $]0, 2\pi[$ posent problème ?
- En un point où elle est définie, donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

(b) Pour $d = 1$, $R = 2r$, $r \neq 1$ et $u \in]0, 2\pi[$, montrer qu'il s'agit d'une ellipse.

Exercice 5.7. (mai 2010)

Dans le plan euclidien on considère le paramétrage de la courbe :

$$P(t) : \left(\frac{u^2+1}{u^3-1}, \frac{2u}{u^3-1} \right)^{\sim} \qquad u \in \Omega = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

(a) Sachant que les polynômes $2u^3 + 1$ et $u^3 + 3u + 2$ n'ont aucun zéro commun, vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.

(b) Donner l'équation de la tangente au point $P(0)$.

Solution : (b) L'équation de la tangente est $x = -1$.

Exercice 5.8. (juin 2011)

Dans le plan euclidien on considère le paramétrage de la courbe :

$$P(t) : \left(\frac{u^2}{u-1}, \frac{u}{u^2-1} \right)^{\sim} \qquad u \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.

(b) Donner l'équation de la tangente au point $P(0)$.

(c) Déterminer toutes les valeurs du paramètre u pour lesquelles la courbe admet une tangente verticale en $P(u)$.

(d) Vérifier (par calcul) que le point de coordonnées $(-1, -1)^{\sim}$ est un point double de la courbe.

(e) Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe.

Solution : (b) L'équation de la tangente est $x = 0$. (c) La courbe admet une tangente verticale en $u = 0$ et $u = 2$.

Exercice 5.9. (septembre 2011)

Dans le plan euclidien on considère la fonction :

$$P(u) : \left(\frac{u^2+2u-1}{u+1}, \frac{u^2}{u+1}\right)^{\sim} \qquad u \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit d'un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

(b) Donner l'équation de la tangente au point $P(-2)$.

(c) Déterminer toutes les valeurs du paramètre u pour lesquelles la courbe admet une tangente en $P(u)$ parallèle à la droite d'équation $y = x/2$.

Solution : (b) L'équation de la tangente est $y = -4$. (c) $u = 1$ et $u = -3$.

Exercice 5.10. (*) Dans un repère orthonormé, on donne l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $xy = a^2$ ($a \neq 0$). Démontrer que pour tout point P de $\mathcal{H}$, les points de la normale en P situés à une distance $|OP|$ de P sont sur les bissectrices des asymptotes.

Solution : Un paramétrage est donné par $P(x) = (x, \frac{a^2}{x})^{\sim}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. Si on note P_1 et P_2 les point situé sur la normale en P à une distance $|OP|$ de P. Alors on peut noter

$$P_1(x) = P(x) + |\overrightarrow{OP(x)}|\mathbf{n}(x) \qquad \text{et} \qquad P_2(x) = P(x)|\overrightarrow{OP(x)}|\mathbf{n}(x).$$

Ainsi, en coordonnées pour $x > 0$, on a

$$P_1(x) = \left(x, \frac{a^2}{x}\right)^{\sim} + x\left(\frac{a^2}{x^2}, 1\right)^{\sim} \qquad P_2(x) = \left(x, \frac{a^2}{x}\right)^{\sim} - x\left(\frac{a^2}{x^2}, 1\right)^{\sim}$$

et $P_1(x)$ est situé sur la première bissectrice (les coordonnées satisfont l'équation $y = x$) tandis que $P_2(x)$ est situé sur la deuxième bissectrice (les coordonnées satisfont l'équation $y = -x$). Lorsque $x < 0$, on a

$$P_1(x) = \left(x - \frac{a^2}{x}, \frac{a^2}{x} - x\right)^{\sim} \qquad P_2(x) = \left(x + \frac{a^2}{x}, \frac{a^2}{x} + x\right)^{\sim}$$

et $P_2(x)$ est situé sur la première bissectrice, tandis que $P_1(x)$ est situé sur la deuxième bissectrice.

Exercice 5.11. (La cycloïde) Un cercle $\mathcal{C}$ roule sans glisser sur une droite d.

(a) Dans un repère adéquat, déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point P, fixe sur le cercle.

(b) Déterminer les arcs réguliers de la courbe décrite par P.

(c) Déterminer les éventuelles symétries d'un arc régulier de courbe.

(d) Donner des équations de la tangente et de la normale en un point de l'arc régulier de courbe.

(e) Calculer la longueur d'un arc régulier de courbe.

(f) Déterminer $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ et esquisser un arc régulier.

Exercice 5.12. Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R et de diamètre $[A, B]$. Soit M un point du cercle et H sa projection orthogonale sur AB. Étudier la courbe décrite par la projection orthogonale de P sur la tangente au cercle en M, lorsque M parcourt le cercle. (Description paramétrique dans un repère adéquat, arcs réguliers, symétries, variations des coordonnées, esquisse)

Solution : Un paramétrage est donné par

$$P(\theta) = R\left(\cos(\theta)(1 + \sin^2(\theta)), \sin^3(\theta)\right)^{\sim}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, lorsqu'on prend le centre du cercle comme origine du repère et $e_1 = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$ et e_2 un vecteur normé perpendiculaire à e_1. On peut se limiter à étudier la courbe pour $\theta \in]0, 2\pi[$. De plus, on a des symétrie par rapport à l'axe OX puis par rapport à l'axe OY. On peut donc se retreindre encore à étudier la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On a un arc régulier de courbe sur les ensembles de la forme :

$$\mathcal{A}_k = \{P(\theta) : \theta \in]k\pi, (k+1)\pi[\}$$

on a une tangente horizontale en $\theta = 0$ et on peut esquisser la courbe en étudiant le signe du vecteur dérivé.

Exercice 5.13. (La cardioïde) Dans un espace affine euclidien de dimension 2, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R et de diamètre $[A, B]$. Soit M un point du cercle et P la projection orthogonale de A sur la tangente au cercle en M. Etudier la courbe décrite par P quand M parcourt le cercle. (Description paramétrique dans un repère adéquat, arcs réguliers, symétries, variations des coordonnées, esquisse)

Solution : Un paramétrage est donné par

$$P(\theta) = R\left(\sin^2(\theta) + \cos(\theta), \sin(\theta)(1 - \cos(\theta))\right)^{\sim}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On a un arc régulier de courbe sur les ensembles de la forme :

$$\mathcal{A}_k = \{P(\theta) : \theta \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[\}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On va donc se limiter à étudier la courbe sur $\mathcal{A}_0$. La longueur d'un arc régulier de courbe est $8R$. Pour étudier la courbe, on a une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (on peu donc se limiter à étudier la courbe sur $]0, \pi[$). On a une tangente horizontale (grâce au calcul de la dérivée seconde) en 0 et une tangente verticale en π. On peut esquisser la courbe en étudiant le signe du vecteur dérivé.