



# Parallélisme, intersections de variétés affines, repères et coordonnées

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 13 mars 2013

# Intersection et parallélisme

## Proposition 10.1

L'intersection de deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ .

## Définition 10.2

Deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont parallèles si  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$  ou  $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$ . On note  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ .

# Intersection et parallélisme

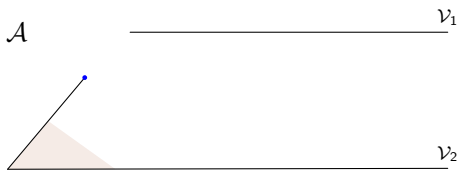
## Proposition 10.1

L'intersection de deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ .

## Définition 10.2

Deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont parallèles si  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$  ou  $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$ . On note  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ .

L'idée :



# Intersection et parallélisme

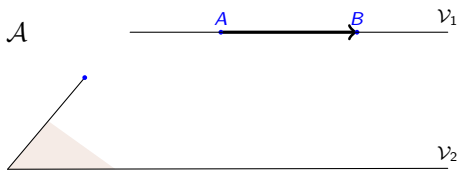
## Proposition 10.1

L'intersection de deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ .

## Définition 10.2

Deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont parallèles si  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$  ou  $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$ . On note  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ .

L'idée :



# Intersection et parallélisme

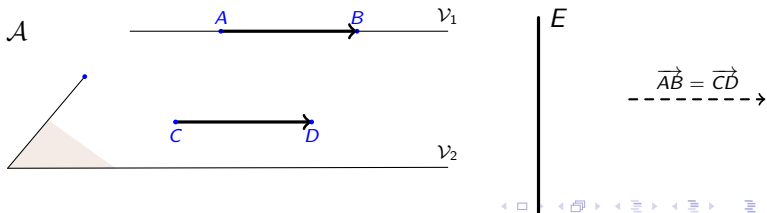
## Proposition 10.1

L'intersection de deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ .

## Définition 10.2

Deux variétés affines  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont parallèles si  $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$  ou  $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$ . On note  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ .

L'idée :



# Propriétés

## Proposition 10.3

- 1 Si  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$  et  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$  alors  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$  ou  $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$  ;
- 2 Si  $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$ , alors  $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$  si, et seulement si  $\vec{\mathcal{V}}_1 = \vec{\mathcal{V}}_2$  ;
- 3 Dans ce dernier cas, si de plus  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$  ;
- 4 Soient  $\mathcal{V}$  une variété affine et  $A \in \mathcal{A}$ . Il existe une unique variété affine  $\mathcal{V}_A$  telle que
  - $A \in \mathcal{V}_A$  ;
  - $\mathcal{V}_A // \mathcal{V}$  ;
  - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$ .

## Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

### Proposition 10.4

*Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension 2. Deux droites de  $\mathcal{A}$  sont soit parallèles soit sécantes.*

## Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

### Proposition 10.4

*Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension 2. Deux droites de  $\mathcal{A}$  sont soit parallèles soit sécantes.*

### Définition 10.5

Dans un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.



## Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

### Proposition 10.4

*Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension 2. Deux droites de  $\mathcal{A}$  sont soit parallèles soit sécantes.*

### Définition 10.5

Dans un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

## Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

### Proposition 10.4

*Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension 2. Deux droites de  $\mathcal{A}$  sont soit parallèles soit sécantes.*

### Définition 10.5

Dans un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

### Proposition 10.6

*Soit  $\dim \mathcal{A} = 3$ . Soient 2 droites  $d_1 = A+\rangle u\langle$ ,  $d_2 = A+\rangle v\langle$ .*

- *Si la famille  $(u, v)$  est linéairement dépendante, alors  $d_1 \parallel d_2$  ;*
- *Si  $(u, v)$  est linéairement indépendante et  $(u, v, \overrightarrow{AB})$  est linéairement dépendante, alors  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes.*
- *Si la famille  $(u, v, \overrightarrow{AB})$  est linéairement indépendante, alors  $d_1$  et  $d_2$  sont gauches.*

# Positions relatives de droites et plans en dimension 3

Soit un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension 3.

## Proposition 10.7

*Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.*

## Proposition 10.8

*Soit  $d$  une droite et  $\pi$  un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit  $d$  et  $\pi$  sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.*

# Repères et coordonnées

## Définition 10.9 (Repères)

Un *repère*  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  est un couple  $(O; \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $\mathcal{A}$  appelé origine du repère et où  $\mathcal{B}$  est une base de  $\vec{\mathcal{A}}$  appelée base du repère.

## Repères et coordonnées

### Définition 10.9 (Repères)

Un repère  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  est un couple  $(O; \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $\mathcal{A}$  appelé origine du repère et où  $\mathcal{B}$  est une base de  $\vec{\mathcal{A}}$  appelée base du repère.

### Définition 10.10

Les *coordonnées* d'un point  $X$  quelconque de  $\mathcal{A}$  dans le repère  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  sont les *composantes* de  $\vec{OX}$  dans  $\mathcal{B}$ . On note  $X : (x_1, \dots, x_n)^\sim$ .

### Proposition 10.11

Soit un repère  $\mathcal{R} = (O; (b_1, \dots, b_n))$  d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans  $\mathcal{R}$  est une bijection  $\Phi_{\mathcal{R}}$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}^n$  : on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP}).$$

Alors  $P$  admet pour coordonnées  $(p_1, \dots, p_n)^\sim$  dans  $\mathcal{R}$  si, et seulement si,

$$P = O + p_1 b_1 + \dots + p_n b_n.$$

## Première utilisation

### Proposition 10.12

Soit  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  un repère d'un espace affine. L'application  $\Phi_{\mathcal{R}}$  est affine : on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)^1$$

pour tous points  $P_1, \dots, P_r$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ .

### Proposition 10.13

Soit  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  un repère d'un espace affine de dimension  $n$ . On a

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)$$

pour tous points  $P_1, \dots, P_r$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$ .

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées.

## Changements de repères

Soient deux repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{A}$  et  $P$  un point de  $\mathcal{A}$ . Quels sont les liens entre les coordonnées de  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et ses coordonnées dans  $\mathcal{R}'$  ?

### Proposition 10.14

Les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)^\sim$  et  $(x'_1, \dots, x'_n)^\sim$  d'un même point  $P$  de  $\mathcal{A}$  dans des repères  $\mathcal{R} = (O; (b_1, \dots, b_n))$  et  $\mathcal{R}' = (O'; (b'_1, \dots, b'_n))$  sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices  $A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  et  $A_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  sont les matrices de changements de base entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . De plus,  $(o_1, \dots, o_n)^\sim$  sont les coordonnées de  $O$  dans  $\mathcal{R}'$  et  $(o'_1, \dots, o'_n)^\sim$  celles de  $O'$  dans  $\mathcal{R}$ .