Parallélisme, intersections de variétés affines, repères et coordonnées

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 13 mars 2013

Intersection et parallélisme

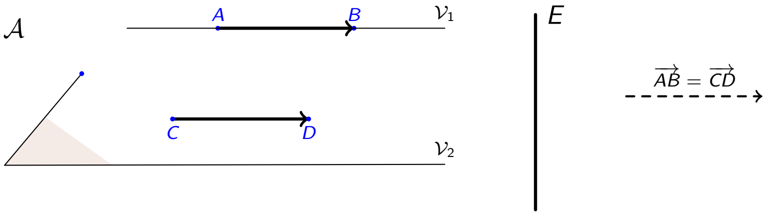
Proposition 10.1

L'intersection de deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 10.2

Deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Propriétés

Proposition 10.3

1. *Si* $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$ *et* $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ *alors* $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ *ou* $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ *;*
2. *Si* $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$*, alors* $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ *si, et seulement si* $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} = \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ *;*
3. *Dans ce dernier cas, si de plus* $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$*, alors* $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ *;*
4. *Soient* $\mathcal{V}$ *une variété affine et* $A \in \mathcal{A}$*. Il existe une unique variété affine* $\mathcal{V}_A$ *telle que*
   - $A \in \mathcal{V}_A$ *;*
   - $\mathcal{V}_A /\!/ \mathcal{V}$ *;*
   - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 10.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes.

Définition 10.5

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Proposition 10.6

Soit $\dim \mathcal{A} = 3$. *Soient 2 droites* $d_1 = A + \rangle u \langle$, $d_2 = A + \rangle v \langle$.

- *Si la famille (u, v) est linéairement dépendante, alors $d_1 \,/\!/\, d_2$;*
- *Si (u, v) est linéairement indépendante et $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement dépendante, alors d_1 et d_2 sont sécantes.*
- *Si la famille $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement indépendante, alors d_1 et d_2 sont gauches.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives de droites et plans en dimension 3

Soit un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3.

Proposition 10.7

Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Proposition 10.8

Soit d une droite et π un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit d et π sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Repères et coordonnées

Définition 10.9 (Repères)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O; \mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Définition 10.10

Les *coordonnées* d'un point X quelconque de $\mathcal{A}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ sont les composantes de $\overrightarrow{OX}$ dans $\mathcal{B}$. On note $X : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$.

Proposition 10.11

Soit un repère $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans $\mathcal{R}$ est une bijection $\Phi_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^n$: on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P) = \Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}).$$

Alors P admet pour coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)^{\sim}$ dans $\mathcal{R}$ si, et seulement si,

$$P = O + p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n.$$

Première utilisation

Proposition 10.12

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine. L'application $\Phi_{\mathcal{R}}$ est affine : on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)$$ [1]

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Proposition 10.13

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine de dimension n. On a

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)$$

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$.

---

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Changements de repères

Soient deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{A}$. Quels sont les liens entre les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$?

Proposition 10.14

Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ et $(x_1', \ldots, x_n')^\sim$ d'un même point P de $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ dans des repères $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ et $\mathcal{R}' = (O'; (b_1', \ldots, b_n'))$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1' \\ \vdots \\ o_n' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont les matrices de changements de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. De plus, $(o_1, \ldots, o_n)^\sim$ sont les coordonnées de O dans $\mathcal{R}'$ et $(o_1', \ldots, o_n')^\sim$ celles O' dans $\mathcal{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.