Repères, coordonnées, équations

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 6 mars 2014

Repères et coordonnées

Définition 10.1 (Repères)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O;\mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Repères et coordonnées

Définition 10.1 (Repères)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O; \mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Définition 10.2

Les *coordonnées* d'un point X quelconque de $\mathcal{A}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ sont les composantes de $\overrightarrow{OX}$ dans $\mathcal{B}$. On note $X : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$.

Proposition 10.3

Soit un repère $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans $\mathcal{R}$ est une bijection $\Phi_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^n$: on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P) = \Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}).$$

Alors P admet pour coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ si, et seulement si,

$$P = O + p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Première utilisation

Proposition 10.4

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ *un repère d'un espace affine. L'application* $\Phi_{\mathcal{R}}$ *est affine : on a*

$$\Phi_{\mathcal{R}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)^{1}$$

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ *et tous* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Proposition 10.5

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ *un repère d'un espace affine de dimension n. On a*

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)$$

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ *et tous* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$.

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées (dans $\mathbb{R}^n$).

Changements de repères

Soient deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{A}$. Quels sont les liens entre les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$?

Proposition 10.6

Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ *et* $(x'_1, \ldots, x'_n)^\sim$ *d'un même point* P *de* $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ *dans des repères* $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ *et* $\mathcal{R}' = (O'; (b'_1, \ldots, b'_n))$ *sont liées par les formules*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *et* $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ *sont les matrices de changements de base entre* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$*. De plus,* $(o_1, \ldots, o_n)^\sim$ *sont les coordonnées de* O *dans* $\mathcal{R}'$ *et* $(o'_1, \ldots, o'_n)^\sim$ *celles* O' *dans* $\mathcal{R}$*.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations : données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R}$: $(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^{\sim} = X_0$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent $\mathcal{V}$ en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

1. Obtenir une description constructive des coordonnées des points de $\mathcal{V}$, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans $\mathcal{V}$ (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 10.7

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ *si, et seulement si* $\overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 10.8 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_r \langle$ *et si les composantes de* u_i $(i \leqslant r)$ *dans* $\mathcal{B}$ *sont* $(u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$ *alors* $P : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ *est dans* $\mathcal{V}$ *si, et seulement si,*

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_{1,0} & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,r} \\ & \vdots & \\ x_n - x_{n,0} & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,r} \end{array} \right.} \tag{10.1}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 10.7

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ si, et seulement si $\overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 10.8 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_r \langle$ et si les composantes de u_i $(i \leqslant r)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$ alors $P : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_{1,0} & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,r} \\ & \vdots & \\ x_n - x_{n,0} & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,r} \end{array} \right.} \tag{10.1}$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si $A : (1, 2, 3) \sim$ et $B : (6, 3, 7)^{\sim}$ alors

$$P : (x, y, z)^{\sim} \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 1 & = & 5\lambda \\ y - 2 & = & \lambda \\ z - 3 & = & 4\lambda. \end{array} \right.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations cartésiennes

Définition 10.9

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 10.10

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_r \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ de coordonnées $X_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^{\sim}$. Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$, alors un point P de coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_r) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_r | X - X_0). \tag{10.2}$$

Equations cartésiennes

Définition 10.9

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 10.10

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \dots, u_r \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ de coordonnées $X_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})^\sim$. Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $U_i = (u_{1,i}, \dots, u_{n,i})^\sim$, alors un point P de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)^\sim$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \dots, U_r) = \mathrm{rg}(U_1, \dots, U_r | X - X_0). \tag{10.2}$$

Cette méthode générale s'applique que $u_1, \dots, u_r$ soient indépendants ou non.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 10.11

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 10.11

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Si dans $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet des équations cartésiennes

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,n}y_n & = & 0 \end{array}\right. ,$$

(ou $AX = 0$ dans l'écriture matricielle), alors $\mathcal{V}$ admet dans $\mathcal{R}$ les équations

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{1,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{p,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \end{array}\right. ,$$

ou encore $A(X - X_0) = 0$, ou enfin $AX = AX_0$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 10.12

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 10.12

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

  détermine une variété affine de dimension 4.
- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

  détermine une droite.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^{\sim}$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^{\sim} \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

On obtient des équations cartésiennes de d en se ramenant à celles de $\overrightarrow{d}$:

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$:

$$\boxed{d \equiv \frac{x_1 - x_{1,0}}{u_1} = \cdots = \frac{x_n - x_{n,0}}{u_n}.}$$

- Si $u_i = 0$ pour un $i \leqslant n$:

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} \frac{x_1 - x_{1,0}}{u_1} = \cdots = \widehat{i} = \cdots = \frac{x_n - x_{n,0}}{u_n} \\ x_i = 0 \end{cases}}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine $\mathcal{A}$ de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 10.13

Soit un hyperplan vectoriel π *déterminé par* P_0 *de coordonnées* $X_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^\sim$ *et par* $n-1$ *vecteurs* $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *(indépendants). Si les composantes de* u_i *dans* $\mathcal{B}$ *sont* $U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$*, alors on a*

$$\pi \equiv \det(U_1, \ldots, U_r | X - X_0) = 0. \tag{10.3}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine $\mathcal{A}$ de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 10.13

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 de coordonnées $X_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ (indépendants). Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(U_1, \ldots, U_r | X - X_0) = 0. \tag{10.3}$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- π_1 contenant $A : (1, 2, 3)^\sim$ et de vect. dir. $v_1 : (-1, 0, 2)^\sim$ et $v_2 : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_2 contenant les points $A : (1, 2, 3)^\sim$, $B : (-1, 0, 2)^\sim$ et $C : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_3 contenant $A : (0, 3, 2)$, $B : (-1, 1, 2)$ et de vect. dir. $v : (1, 1, 1)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 2.
- La droite $d = A+\rangle u\langle$, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $u : (u_1, u_2)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $B : (b_1, b_2)^\sim$: $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

$$\boxed{AB \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}}$$

avec la convention habituelle.

- Reciproque : une droite a pour équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$ $(a_1 a_2 \neq 0)$.
  1. On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
  2. Le sous-vectoriel directeur a pour éq. $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$.
  3. Un vecteur directeur est donné par $(-a_2, a_1)$.

Parallélisme et faisceau de droites

Proposition 10.14

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sont*

- *parallèles si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- *sécantes dans l'autre cas : si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad \textit{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme et faisceau de droites

Proposition 10.14

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sont*

- *parallèles si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad ou \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- *sécantes dans l'autre cas : si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad ou \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Proposition 10.15

Soient les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sécantes en* P. *Une droite* d'' *contient* P *si et seulement si elle admet pour équation*

$$d'' \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - b) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- La droite $d = A+\rangle u\langle$, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 u_3 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $B : (b_1, b_2, b_3)^\sim$: on a $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

$$\boxed{AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}}$$

avec la convention habituelle.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour éq. (dans $\mathcal{B}$) :

$$\overrightarrow{d} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & = & 0 \\ a'_1y_1 + a'_2y_2 + a'_3y_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de d, ou en coupant par un plan (par exemple $x_3 = 0$)
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'éq. de $\overrightarrow{d}$. Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a'_1 & a'_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix}\right)$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & b' \end{array} \right. \text{ et } d' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & = & e \\ c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 & = & e' \end{array} \right.$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

Proposition 10.16

Les droites d et d' sont

- *Parallèles confondues si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$ *;*
- *Parallèles distinctes si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = 2$ *et* $\mathrm{rg}(A|B) = 3$ *;*
- *Secantes si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$ *;*
- *Gauches si et seulement si* $\mathrm{rg}(A|B) = 4$, *ou* $\det(A|B) \neq 0$.

Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan $\pi = A+\rangle u, v\langle$, où $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.}$$

- Le plan $\pi = ABC$: considérer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (avec des notations évidentes) :

$$\boxed{ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0}$$

- Le plan π contenant A, B et dont un vecteur directeur u est donné : considérer A, $\overrightarrow{AB}$ et u.

Réciproque

- Un plan π en dimension 3 admet une équation générale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0). \tag{10.4}$$

- On trouve facilement des points de π en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple $a_1 \neq 0$, alors (10.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme, faisceaux de plans

- Les plans $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $\pi' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$ sont parallèles si et seulement si
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 1.$$
- Ils sont confondus si et seulement si
$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \end{pmatrix} = 1.$$
- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite
$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right.$$

Proposition 10.17 (Faisceaux de plans)

Un plan π'' contient d si et seulement si il admet une équation du type
$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches d_1 et d_2, un point P (extérieur à d_1 et d_2) et une droite d_3.

Proposition 10.18

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui contient P si et seulement si aucun des plans déterminés par P et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans π_1 et π_2 déterminées par P et d_1 et P et d_2, respectivement.

Proposition 10.19

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui est parallèle à d_3 si et seulement si d_1, d_2 et d_3 ne sont pas parallèles à un même paln Cette droite est l'intersection des plans π_1 contenant d_1 et parallèle à d_3 et π_2 contenant d_2 et parallèle à d_3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.