



Repères, coordonnées, équations

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 6 mars 2014

Repères et coordonnées

Définition 10.1 (Repères)

Un *repère* \mathcal{R} de \mathcal{A} est un couple $(O; \mathcal{B})$ où O est un point de \mathcal{A} appelé origine du repère et où \mathcal{B} est une base de $\vec{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Définition 10.2

Les *coordonnées* d'un point X quelconque de \mathcal{A} dans le repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ sont les *composantes* de \vec{OX} dans \mathcal{B} . On note $X : (x_1, \dots, x_n)^\sim$.

Proposition 10.3

Soit un repère $\mathcal{R} = (O; (b_1, \dots, b_n))$ d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans \mathcal{R} est une *bijection* $\Phi_{\mathcal{R}}$ de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^n : on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}(P) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP}).$$

Alors P admet pour coordonnées $(p_1, \dots, p_n)^\sim$ dans \mathcal{R} si, et seulement si,

$$P = O + p_1 b_1 + \dots + p_n b_n.$$

Première utilisation

Proposition 10.4

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine. L'application $\Phi_{\mathcal{R}}$ est affine : on a

$$\Phi_{\mathcal{R}}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)^1$$

pour tous points P_1, \dots, P_r et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.

Proposition 10.5

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine de dimension n . On a

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Phi_{\mathcal{R}}(P_i)$$

pour tous points P_1, \dots, P_r et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$.

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées (dans \mathbb{R}^n).

Changements de repères

Soient deux repères \mathcal{R} et \mathcal{R}' de \mathcal{A} et P un point de \mathcal{A} . Quels sont les liens entre les coordonnées de P dans le repère \mathcal{R} et ses coordonnées dans \mathcal{R}' ?

Proposition 10.6

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)^\sim$ et $(x'_1, \dots, x'_n)^\sim$ d'un même point P de \mathcal{A} dans des repères $\mathcal{R} = (O; (b_1, \dots, b_n))$ et $\mathcal{R}' = (O'; (b'_1, \dots, b'_n))$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices $A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ sont les matrices de changements de base entre \mathcal{B} et \mathcal{B}' . De plus, $(o_1, \dots, o_n)^\sim$ sont les coordonnées de O dans \mathcal{R}' et $(o'_1, \dots, o'_n)^\sim$ celles O' dans \mathcal{R} .

Equations : données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine \mathcal{A} de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de $\vec{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \vec{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R} : (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \sim = X_0$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent \mathcal{V} en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

- 1 Obtenir une description constructive des coordonnées des points de \mathcal{V} , à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
- 2 Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans \mathcal{V} (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 10.7

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \vec{\mathcal{V}}$ si, et seulement si $\overrightarrow{P_0P} \in \vec{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 10.8 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\vec{\mathcal{V}} = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ et si les composantes de u_i ($i \leq r$) dans \mathcal{B} sont $(u_{1,i}, \dots, u_{n,i})^\sim$ alors $P : (x_1, \dots, x_n)^\sim$ est dans \mathcal{V} **si, et seulement si,**

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 - x_{1,0} &= \lambda_1 u_{1,1} + \dots + \lambda_r u_{1,r} \\ &\vdots \\ x_n - x_{n,0} &= \lambda_1 u_{n,1} + \dots + \lambda_r u_{n,r} \end{cases} \quad (10.1)$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si $A : (1, 2, 3)^\sim$ et $B : (6, 3, 7)^\sim$ alors

$$P : (x, y, z)^\sim \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - 1 &= 5\lambda \\ y - 2 &= \lambda \\ z - 3 &= 4\lambda. \end{cases}$$

Equations cartésiennes

Définition 10.9

Des équations cartésiennes de la variété affine \mathcal{V} dans le repère \mathcal{R} sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère \mathcal{R} pour qu'il soit dans \mathcal{V} .

Proposition 10.10

Soit une variété affine \mathcal{V} telle que $\vec{\mathcal{V}} = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ et P_0 un point de \mathcal{V} de coordonnées $X_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})^\sim$. Si les composantes de u_i dans \mathcal{B} sont $U_i = (u_{1,i}, \dots, u_{n,i})^\sim$, alors un point P de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)^\sim$ est dans \mathcal{V} si, et seulement si,

$$\text{rg}(U_1, \dots, U_r) = \text{rg}(U_1, \dots, U_r | X - X_0). \quad (10.2)$$

Cette méthode générale s'applique que u_1, \dots, u_r soient indépendants ou non.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 10.11

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de **dimension p** admet dans \mathcal{R} des équations cartésiennes formant un système linéaire de **rang $n - p$** .

Si dans \mathcal{B} , $\vec{\mathcal{V}}$ admet des équations cartésiennes

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,n}y_n & = & 0 \end{cases},$$

(ou $AX = 0$ dans l'écriture matricielle), alors \mathcal{V} admet dans \mathcal{R} les équations

$$\begin{cases} a_{1,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{1,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{p,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{p,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \end{cases},$$

ou encore $A(X - X_0) = 0$, ou enfin $AX = AX_0$.

Réciproque

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension n muni d'un repère \mathcal{R} .

Proposition 10.12

L'ensemble \mathcal{V} des points P de \mathcal{A} dont les coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n) \sim$ dans \mathcal{R} satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \text{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\vec{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans \mathcal{B}).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

détermine une variété affine de dimension 4.

- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

détermine une droite.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine \mathcal{A} de dim. n muni d'un repère \mathcal{R} ;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \dots, u_n)^\sim \in \vec{d} \setminus \{0\}$.

On obtient des équations cartésiennes de d en se ramenant à celles de \vec{d} :

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$:

$$d \equiv \frac{x_1 - x_{1,0}}{u_1} = \dots = \frac{x_n - x_{n,0}}{u_n}.$$

- Si $u_i = 0$ pour un $i \leq n$:

$$d \equiv \begin{cases} \frac{x_1 - x_{1,0}}{u_1} = \dots = \hat{i} = \dots = \frac{x_n - x_{n,0}}{u_n} \\ x_i = 0 \end{cases}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine \mathcal{A} de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 10.13

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 de coordonnées $X_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})^\sim$ et par $n - 1$ vecteurs u_1, \dots, u_{n-1} (indépendants). Si les composantes de u_i dans \mathcal{B} sont $U_i = (u_{1,i}, \dots, u_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(U_1, \dots, U_{n-1} | X - X_0) = 0. \quad (10.3)$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- π_1 contenant $A : (1, 2, 3)^\sim$ et de vect. dir. $v_1 : (-1, 0, 2)^\sim$ et $v_2 : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_2 contenant les points $A : (1, 2, 3)^\sim$, $B : (-1, 0, 2)^\sim$ et $C : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_3 contenant $A : (0, 3, 2)$, $B : (-1, 1, 2)$ et de vect. dir. $v : (1, 1, 1)$.

Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 2.
- La droite $d = A + \langle u \rangle$, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $u : (u_1, u_2)^\sim$:

$$d \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 = 0$.

- La droite AB , où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $B : (b_1, b_2)^\sim$: $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

$$AB \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}$$

avec la convention habituelle.

- Réciproque : une droite a pour équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$ ($a_1 a_2 \neq 0$).
 - ① On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
 - ② Le sous-vectoriel directeur a pour éq. $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$.
 - ③ Un vecteur directeur est donné par $(-a_2, a_1)$.

Parallélisme et faisceau de droites

Proposition 10.14

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'$ sont

- *parallèles si*

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 0$$

- *sécantes dans l'autre cas : si*

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Proposition 10.15

Soient les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'$ sécantes en P . Une droite d'' contient P si et seulement si elle admet pour équation

$$d'' \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- La droite $d = A + \langle u \rangle$, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$:

$$d \equiv \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 u_3 = 0$.

- La droite AB , où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $B : (b_1, b_2, b_3)^\sim$: on a $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

$$AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

avec la convention habituelle.

Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases} \quad \text{où} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour équ. (dans \mathcal{B}) :

$$\vec{d} \equiv \begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \\ a'_1y_1 + a'_2y_2 + a'_3y_3 = 0 \end{cases}$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de d , ou en coupant par un plan (par exemple $x_3 = 0$)
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'équ. de \vec{d} . Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a'_1 & a'_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = e \\ c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3 = e' \end{cases}$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

Proposition 10.16

Les droites d et d' sont

- *Parallèles confondues si et seulement si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$;*
- *Parallèles distinctes si et seulement si $\text{rg}(A) = 2$ et $\text{rg}(A|B) = 3$;*
- *Secantes si et seulement si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$;*
- *Gauches si et seulement si $\text{rg}(A|B) = 4$, ou $\det(A|B) \neq 0$.*

Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan $\pi = A + \langle u, v \rangle$, où $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- Le plan $\pi = ABC$: considérer \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} (avec des notations évidentes) :

$$ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

- Le plan π contenant A, B et dont un vecteur directeur u est donné : considérer A, \overrightarrow{AB} et u .

Réciproque

- Un plan π en dimension 3 admet une équation générale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0). \quad (10.4)$$

- On trouve facilement des points de π en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple $a_1 \neq 0$, alors (10.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

Parallélisme, faisceaux de plans

- Les plans $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $\pi' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$ sont parallèles si et seulement si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 1.$$

- Ils sont confondus si et seulement si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \end{pmatrix} = 1.$$

- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{cases}$$

Proposition 10.17 (Faisceaux de plans)

Un plan π'' contient d si et seulement si il admet une équation du type

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches d_1 et d_2 , un point P (extérieur à d_1 et d_2) et une droite d_3 .

Proposition 10.18

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui contient P si et seulement si aucun des plans déterminés par P et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans π_1 et π_2 déterminées par P et d_1 et P et d_2 , respectivement.

Proposition 10.19

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui est parallèle à d_3 si et seulement si d_1 , d_2 et d_3 ne sont pas parallèles à un même plan. Cette droite est l'intersection des plans π_1 contenant d_1 et parallèle à d_3 et π_2 contenant d_2 et parallèle à d_3 .