Equations de variétés affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 14 mars 2013

Données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R}$: $(p_1, \ldots, p_n)^{\sim}$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent $\mathcal{V}$ en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

1. Obtenir une description constructive des coordonnées des points de $\mathcal{V}$, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans $\mathcal{V}$ (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R}$: $(p_1, \ldots, p_n)^\sim$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent $\mathcal{V}$ en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

1. Obtenir une description constructive des coordonnées des points de $\mathcal{V}$, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans $\mathcal{V}$ (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 11.1

On a $X \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ *si, et seulement si* $\overrightarrow{P_0X} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 11.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle v_1, \ldots, v_r \langle$ *et si les composantes de* v_i $(i \leqslant r)$ *dans* $\mathcal{B}$ *sont* $(v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^{\sim}$ *alors* $P : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ *est dans* $\mathcal{V}$ *si, et seulement si,*

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - p_1 & = & \lambda_1 v_{1,1} + \cdots + \lambda_r v_{1,r} \\ & \vdots & \\ x_n - p_n & = & \lambda_1 v_{n,1} + \cdots + \lambda_r v_{n,r} \end{array} \right.} \tag{11.1}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 11.1

On a $X \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ *si, et seulement si* $\overrightarrow{P_0X} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 11.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle v_1, \ldots, v_r \langle$ *et si les composantes de* v_i $(i \leqslant r)$ *dans* $\mathcal{B}$ *sont* $(v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^\sim$ *alors* $P : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ *est dans* $\mathcal{V}$ *si, et seulement si,*

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - p_1 & = & \lambda_1 v_{1,1} + \cdots + \lambda_r v_{1,r} \\ & \vdots & \\ x_n - p_n & = & \lambda_1 v_{n,1} + \cdots + \lambda_r v_{n,r} \end{array} \right.} \tag{11.1}$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si $A : (1, 2, 3) \sim$ et $B : (6, 3, 7)^\sim$ alors

$$X : (y, y, z)^\sim \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 1 & = & 5\lambda \\ y - 2 & = & \lambda \\ z - 3 & = & 4\lambda. \end{array} \right.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations cartésiennes

Définition 11.3

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et sufisantes sur les coordonnées d'un point X dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 11.4

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle v_1, \ldots, v_r \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ de coordonnées $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$. Si les composantes de v_i dans $\mathcal{B}$ sont $V_i = (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^\sim$, alors un point P de coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_r) = \mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_r | X - X_0). \tag{11.2}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations cartésiennes

Définition 11.3

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et sufisantes sur les coordonnées d'un point X dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 11.4

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle v_1, \ldots, v_r \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ de coordonnées $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$. Si les composantes de v_i dans $\mathcal{B}$ sont $V_i = (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^\sim$, alors un point P de coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_r) = \mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_r | X - X_0). \tag{11.2}$$

Cette méthode générale s'applique que $v_1, \ldots, v_r$ soient indépendants ou non.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 11.5

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 11.5

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Si dans $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet des équations cartésiennes

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,n}y_n & = & 0 \end{array}\right.,$$

(ou $AX = 0$ dans l'écriture matricielle), alors $\mathcal{V}$ admet dans $\mathcal{R}$ les équations

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{1,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}(x_1 - x_{1,0}) + \cdots + a_{p,n}(x_n - x_{n,0}) & = & 0 \end{array}\right.,$$

ou encore $AX = AX_0$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 11.6

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 11.6

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, les équations
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$
déterminent une variété affine de dimension 4.
- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, les équations
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
déterminent une droite.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

On obtient des équations cartésiennes de d en se ramenant à celles de $\overrightarrow{d}$:

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$:

$$\boxed{d \equiv \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n}.}$$

- Si $u_i = 0$ pour un $i \leqslant n$:

$$\boxed{d \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \widehat{i} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{array} \right.}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. vectoriel E de dimension n et une base $\mathcal{B}$.

Proposition 11.7

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 de coordonnées $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (indépendants). Si les composantes de v_i dans $\mathcal{B}$ sont $V_i = (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(V_1, \ldots, V_r | X - X_0) = 0. \tag{11.3}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. vectoriel E de dimension n et une base $\mathcal{B}$.

Proposition 11.7

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 de coordonnées $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (indépendants). Si les composantes de v_i dans $\mathcal{B}$ sont $V_i = (v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(V_1, \ldots, V_r | X - X_0) = 0. \tag{11.3}$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- π_1 contenant $A : (1, 2, 3)^\sim$ et de vect. dir. $v_1 : (-1, 0, 2)^\sim$ et $v_2 : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_2 contenant les points $A : (1, 2, 3)^\sim$, $B : (-1, 0, 2)^\sim$ et $C : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_3 contenant $A : (0, 3, 2)$, $B : (-1, 1, 2)$ et de v. dir. $v : (1, 1, 1)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 2.
- La droite $d = A + \rangle u \langle$, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $u : (u_1, u_2)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $B : (b_1, b_2)^\sim$: $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

$$\boxed{AB \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}}$$

avec la convention habituelle.

- Reciproque : une droite a pour équation $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ $(a_1 a_2 \neq 0)$.
  1. On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
  2. Le sous-vectoriel directeur a pour éq. $a_1y_1 + a_2y_2 = 0$.
  3. Un vecteur directeur est donné par $(-a_2, a_1)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme et faisceau de droites

Proposition 11.8

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sont*

- *parallèles si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad \textit{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- *sécantes si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad \textit{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme et faisceau de droites

Proposition 11.8

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sont*

- *parallèles si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad ou \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- *sécantes si*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad ou \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Proposition 11.9

Soient les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ *et* $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ *sécantes en* P*. Une droite* d'' *contient* P *si et seulement si elle admet pour équation*

$$d'' \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - b) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- La droite $d = A+\rangle u\langle$, où $A:(a_1,a_2,a_3)^\sim$ et $u:(u_1,u_2,u_3)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1-a_1 & u_1\\ x_2-a_2 & u_2\\ x_3-a_3 & u_3\end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1-a_1}{u_1} = \frac{x_2-a_2}{u_2} = \frac{x_3-a_3}{u_3}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1u_2u_3 = 0$.

- La droite AB, où $A:(a_1,a_2,a_3)^\sim$ et $B:(b_1,b_2,b_3)^\sim$: on a $\overrightarrow{AB}:(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

$$\boxed{AB \equiv \frac{x_1-a_1}{b_1-a_1} = \frac{x_2-a_2}{b_2-a_2} = \frac{x_3-a_3}{b_3-a_3}}$$

avec la convention habituelle.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & b' \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour éq. (dans $\mathcal{B}$) :

$$\overrightarrow{d} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & = & 0 \\ a_1'y_1 + a_2'y_2 + a_3'y_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de d, ou en coupant par un plan (par exemple $x_3 = 0$)
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'éq. de $\overrightarrow{d}$. Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1' & a_3' \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \right)$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & b' \end{array} \right. \text{ et } d' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & = & e \\ c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 & = & e' \end{array} \right.$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

Proposition 11.10

Les droites d et d' sont

- *Parallèles confondues si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$ *;*
- *Parallèles distinctes si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = 2$ *et* $\mathrm{rg}(A|B) = 3$ *;*
- *Secantes si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$ *;*
- *Gauches si et seulement si* $\mathrm{rg}(A|B) = 4$, *ou* $\det(A|B) \neq 0$.

Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan $\pi = A+\rangle u, v\langle$, où $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.}$$

- Le plan $\pi = ABC$: considérer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (avec des notations évidentes) :

$$\boxed{ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0}$$

- Le plan π contenant A, B et dont un vecteur directeur u est donné : considérer A, $\overrightarrow{AB}$ et u.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

- Un plan π en dimension 3 admet une équation générale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0). \tag{11.4}$$

- On trouve facilement des points de π en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple $a_1 \neq 0$, alors (11.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme, faisceaux de plans

- Les plans $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $\pi' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$ sont parallèles si et seulement si
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 1.$$
- Ils sont confondus si et seulement si
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \end{pmatrix} = 1.$$
- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite
$$d \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right.$$

Proposition 11.11 (Faisceaux de plans)

Un plan π'' contient d si et seulement si il admet une équation du type

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches d_1 et d_2, un point P (extérieur à d_1 et d_2) et une droite d_3.

Proposition 11.12

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui contient P si et seulement si aucun des plans déterminés par P et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans π_1 et π_2 déterminées par P et d_1 et P et d_2, respectivement.

Proposition 11.13

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui est parallèle à d_3 si et seulement si d_1, d_2 et d_3 ne sont pas parallèles à un même paln Cette droite est l'intersection des plans π_1 contenant d_1 et parallèle à d_3 et π_2 contenant d_2 et parallèle à d_3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentations