

## Equations de variétés affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 14 mars 2013

### Résultat fondamental et équations paramétriques

#### Proposition 11.1

On a  $X \in \mathcal{V} = P_0 + \vec{\mathcal{V}}$  si, et seulement si  $\overrightarrow{P_0X} \in \vec{\mathcal{V}}$ .

Conséquence :

#### Proposition 11.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si  $\vec{\mathcal{V}} = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$  et si les composantes de  $v_i$  ( $i \leq r$ ) dans  $\mathcal{B}$  sont  $(v_{1,i}, \dots, v_{n,i})^\sim$  alors  $P : (x_1, \dots, x_n)^\sim$  est dans  $\mathcal{V}$  si, et seulement si,

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 - p_1 &= \lambda_1 v_{1,1} + \dots + \lambda_r v_{1,r} \\ &\vdots \\ x_n - p_n &= \lambda_1 v_{n,1} + \dots + \lambda_r v_{n,r} \end{cases} \quad (11.1)$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si  $A : (1, 2, 3)^\sim$  et  $B : (6, 3, 7)^\sim$  alors

$$X : (y, y, z)^\sim \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - 1 &= 5\lambda \\ y - 2 &= \lambda \\ z - 3 &= 4\lambda. \end{cases}$$

## Données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  ;
- Un repère  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  est une base de  $\vec{\mathcal{A}}$  ;
- Une variété affine  $\mathcal{V} = P_0 + \vec{\mathcal{V}}$  ;
- Les coordonnées de  $P_0$  dans  $\mathcal{R} : (p_1, \dots, p_n)^\sim$ .

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent  $\mathcal{V}$  en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

- 1 Obtenir une description constructive des coordonnées des points de  $\mathcal{V}$ , à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
- 2 Obtenir des conditions exprimant qu'un point  $P$  est dans  $\mathcal{V}$  (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

### Equations cartésiennes

#### Définition 11.3

Des équations cartésiennes de la variété affine  $\mathcal{V}$  dans le repère  $\mathcal{R}$  sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées d'un point  $X$  dans le repère  $\mathcal{R}$  pour qu'il soit dans  $\mathcal{V}$ .

#### Proposition 11.4

Soit une variété affine  $\mathcal{V}$  telle que  $\vec{\mathcal{V}} = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$  et  $P_0$  un point de  $\mathcal{V}$  de coordonnées  $X_0 = (p_1, \dots, p_n)^\sim$ . Si les composantes de  $v_i$  dans  $\mathcal{B}$  sont  $V_i = (v_{1,i}, \dots, v_{n,i})^\sim$ , alors un point  $P$  de coordonnées  $X = (x_1, \dots, x_n)^\sim$  est dans  $\mathcal{V}$  si, et seulement si,

$$\text{rg}(V_1, \dots, V_r) = \text{rg}(V_1, \dots, V_r | X - X_0). \quad (11.2)$$

Cette méthode générale s'applique que  $v_1, \dots, v_r$  soient indépendants ou non.

## Nombre d'équations et dimension

### Proposition 11.5

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $n$  et  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  un repère. Toute variété affine de dimension  $p$  admet dans  $\mathcal{R}$  des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang  $n - p$ .

Si dans  $\mathcal{B}$ ,  $\vec{\mathcal{V}}$  admet des équations cartésiennes

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}y_1 + \dots + a_{p,n}y_n = 0 \end{cases},$$

(ou  $AX = 0$  dans l'écriture matricielle), alors  $\mathcal{V}$  admet dans  $\mathcal{R}$  les équations

$$\begin{cases} a_{1,1}(x_1 - x_{1,0}) + \dots + a_{1,n}(x_n - x_{n,0}) = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}(x_1 - x_{1,0}) + \dots + a_{p,n}(x_n - x_{n,0}) = 0 \end{cases},$$

ou encore  $AX = AX_0$ .

## Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine  $\mathcal{A}$  de dim.  $n$  muni d'un repère  $\mathcal{R}$ ;
- une droite  $d$  déterminée par un point  $P_0 : (p_1, \dots, p_n)^\sim$  et un vecteur directeur  $u : (u_1, \dots, u_n)^\sim \in \vec{d} \setminus \{0\}$ .

On obtient des équations cartésiennes de  $d$  en se ramenant à celles de  $\vec{d}$  :

- Si  $u_1 \cdots u_n \neq 0$  :

$$d \equiv \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n}.$$

- Si  $u_i = 0$  pour un  $i \leq n$  :

$$d \equiv \begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \dots = \widehat{i} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{cases}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de  $u$  sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

## Réciproque

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $n$  muni d'un repère  $\mathcal{R}$ .

### Proposition 11.6

L'ensemble  $\mathcal{V}$  des points  $P$  de  $\mathcal{A}$  dont les coordonnées  $X = (x_1, \dots, x_n)^\sim$  dans  $\mathcal{R}$  satisfont un système d'équations linéaires compatible  $AX = B$  est une variété affine de dimension  $n - \text{rg}(A)$ , dont le sous espace vectoriel directeur  $\vec{\mathcal{V}}$  admet pour équations  $AX = 0$  (dans  $\mathcal{B}$ ).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, les équations

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

déterminent une variété affine de dimension 4.

- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, les équations

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

déterminent une droite.

## Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et une base  $\mathcal{B}$ .

### Proposition 11.7

Soit un hyperplan vectoriel  $\pi$  déterminé par  $P_0$  de coordonnées  $X_0 = (p_1, \dots, p_n)^\sim$  et par  $n - 1$  vecteurs  $v_1, \dots, v_{n-1}$  (indépendants). Si les composantes de  $v_i$  dans  $\mathcal{B}$  sont  $V_i = (v_{1,i}, \dots, v_{n,i})^\sim$ , alors on a

$$\pi \equiv \det(V_1, \dots, V_{n-1} | X - X_0) = 0. \quad (11.3)$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- $\pi_1$  contenant  $A : (1, 2, 3)^\sim$  et de vect. dir.  $v_1 : (-1, 0, 2)^\sim$  et  $v_2 : (1, 1, 1)^\sim$ ;
- $\pi_2$  contenant les points  $A : (1, 2, 3)^\sim$ ,  $B : (-1, 0, 2)^\sim$  et  $C : (1, 1, 1)^\sim$ ;
- $\pi_3$  contenant  $A : (0, 3, 2)$ ,  $B : (-1, 1, 2)$  et de v. dir.  $v : (1, 1, 1)$ .

## Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère  $(O; \mathcal{B})$  d'un espace affine de dim. 2.
- La droite  $d = A+)u\langle$ , où  $A : (a_1, a_2)^\sim$  et  $u : (u_1, u_2)^\sim$  :

$$d \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}$$

avec la convention habituelle, si  $u_1 u_2 = 0$ .

- La droite  $\overrightarrow{AB}$ , où  $A : (a_1, a_2)^\sim$  et  $B : (b_1, b_2)^\sim$  :  $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

$$AB \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}$$

avec la convention habituelle.

- Reciproque : une droite a pour équation  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$  ( $a_1 a_2 \neq 0$ ).
  - On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
  - Le sous-vectoriel directeur a pour éq.  $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$ .
  - Un vecteur directeur est donné par  $(-a_2, a_1)$ .

## Parallélisme et faisceau de droites

### Proposition 11.8

Les droites  $d \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$  et  $d' \equiv a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = b'$  sont

- parallèles si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 0$$

- sécantes si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

### Proposition 11.9

Soient les droites  $d \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$  et  $d' \equiv a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = b'$  sécantes en  $P$ . Une droite  $d''$  contient  $P$  si et seulement si elle admet pour équation

$$d'' \equiv \lambda(a_1 x_1 + a_2 x_2 - b) + \mu(a'_1 x_1 + a'_2 x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

## Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère  $(O; \mathcal{B})$  d'un espace affine de dim. 3.
- La droite  $d = A+)u\langle$ , où  $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$  et  $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$  :

$$d \equiv \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}$$

avec la convention habituelle, si  $u_1 u_2 u_3 = 0$ .

- La droite  $\overrightarrow{AB}$ , où  $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$  et  $B : (b_1, b_2, b_3)^\sim$  : on a  $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ .

$$AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

avec la convention habituelle.

## Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \\ a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = b' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour éq. (dans  $\mathcal{B}$ ) :

$$\vec{d} \equiv \begin{cases} a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0 \\ a'_1 y_1 + a'_2 y_2 + a'_3 y_3 = 0 \end{cases}$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de  $d$ , ou en coupant par un plan (par exemple  $x_3 = 0$ )
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'éq. de  $\vec{d}$ . Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left( \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a'_1 & a'_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \right)$$

## Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases} \text{ et } d' \equiv \begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = e \\ c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3 = e' \end{cases}$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

### Proposition 11.10

Les droites  $d$  et  $d'$  sont

- Parallèles confondues si et seulement si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$  ;
- Parallèles distinctes si et seulement si  $\text{rg}(A) = 2$  et  $\text{rg}(A|B) = 3$  ;
- Secantes si et seulement si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$  ;
- Gauches si et seulement si  $\text{rg}(A|B) = 4$ , ou  $\det(A|B) \neq 0$ .

13

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Réciproque

- Un plan  $\pi$  en dimension 3 admet une équation générale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0). \quad (11.4)$$

- On trouve facilement des points de  $\pi$  en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple  $a_1 \neq 0$ , alors (11.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

15

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère  $(O; \mathcal{B})$  d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan  $\pi = A+\rangle u, v \langle$ , où  $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  :

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- Le plan  $\pi = ABC$  : considérer  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  (avec des notations évidentes) :

$$ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

- Le plan  $\pi$  contenant  $A, B$  et dont un vecteur directeur  $u$  est donné : considérer  $A, \overrightarrow{AB}$  et  $u$ .

14

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Parallélisme, faisceaux de plans

- Les plans  $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$  et  $\pi' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$  sont parallèles si et seulement si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 1.$$

- Ils sont confondus si et seulement si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \end{pmatrix} = 1.$$

- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases}$$

### Proposition 11.11 (Faisceaux de plans)

Un plan  $\pi''$  contient  $d$  si et seulement si il admet une équation du type

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

16

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches  $d_1$  et  $d_2$ , un point  $P$  (extérieur à  $d_1$  et  $d_2$ ) et une droite  $d_3$ .

### Proposition 11.12

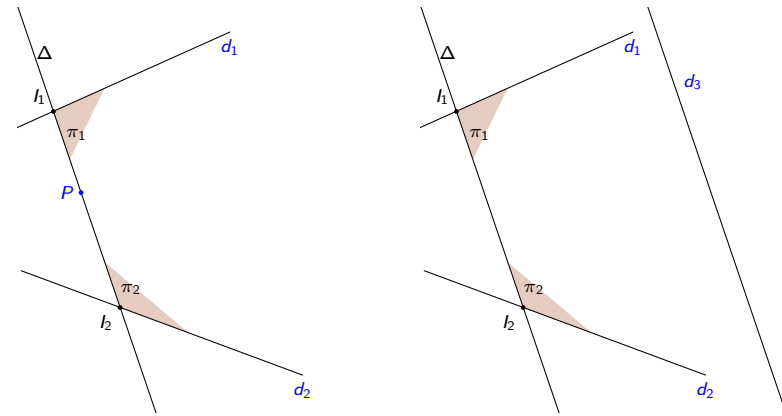
*Il existe une unique droite  $\Delta$  qui coupe  $d_1$  et  $d_2$  et qui contient  $P$  si et seulement si aucun des plans déterminés par  $P$  et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$  déterminées par  $P$  et  $d_1$  et  $P$  et  $d_2$ , respectivement.*

### Proposition 11.13

*Il existe une unique droite  $\Delta$  qui coupe  $d_1$  et  $d_2$  et qui est parallèle à  $d_3$  si et seulement si  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  ne sont pas parallèles à un même plan. Cette droite est l'intersection des plans  $\pi_1$  contenant  $d_1$  et parallèle à  $d_3$  et  $\pi_2$  contenant  $d_2$  et parallèle à  $d_3$ .*

17

## Représentations



18