Géométrie euclidienne

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 13 mars 2014

Point de vue

En géométrie euclidienne classique :

- les angles sont *mesurés* avec un rapporteur ;
- Les distances sont *mesurées* avec une règle graduée ;
- Cela permet de définir *le* produit scalaire ;
- Produit scalaire, longueurs et angles sont liés par une formule bien connue.

Le point de vue qui se généralise à toute dimension :

- On définit ce qu'est *un* produit scalaire ;
- On donne la définition des longueurs et angles à partir d'un produit scalaire ;
- On fait en sorte que les formules coïncident avec celles que l'on connait (en dimension 2 et 3).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Produits scalaires

Définition 12.1

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

qui est

1. Symétrique : on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;
2. Bilinéaire : on a
   - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
   - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$,

   pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. Définie positive : On a $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace vectoriel euclidien.

Remarques : La définition doit être légèrement modifiée pour les espaces complexes. Le produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est aussi noté $u \bullet v$.

Exemples

- Le produit scalaire préféré ou standard de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

- L'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 7x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Remarque : ces produits sont définis comme des produits matriciels.

- L'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^p_p$ ($p \in \mathbb{N}_0$) :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(\tilde{B} A) = \sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}.$$

- L'opération suivante n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$:

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t' \end{pmatrix}) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - tt'.$$

Longueurs de vecteurs

Définition 12.2

La longueur du vecteur $x \in E$, encore appelée norme ou module, est

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Elle est encore notée $||x||$.

La définition est licite, puisque le radicand est positif ou nul.

Proposition 12.3

Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\lambda x| = |\lambda||x|$. On a $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

Preuve : appliquer les définitions.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 12.4 (Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont linéairement dépendants.

Preuve :

- Considérer d'abord le cas $y = 0$;
- Dans le cas $y \neq 0$, considérer la fonction du second degré

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto f(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle.$$

- On a $f(\lambda) \geqslant 0$ pour tout λ, donc $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leqslant 0$, qui conduit au premier résultat.
- Pour l'égalité : on a $\Delta = 0$ ssi $\exists \lambda_0 : f(\lambda_0) = 0$.

Inégalité de Minkowski

Proposition 12.5 (Minkowski)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont multiples l'un de l'autre par un facteur non négatif.

Fixons $x, y \in E$. On se débarrasse de la racine en considérant les carrés. On a alors

$$\begin{aligned}
|x+y|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle && (12.1)\\
&= |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 && (12.2)\\
&\leqslant |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 && (12.3)\\
&\leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 && (12.4)\\
&= (|x| + |y|)^2, && (12.5)
\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, $|x||y| = |\langle x, y\rangle| = \langle x, y\rangle$.

Angle non orienté de deux vecteurs (non nuls)

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. On a

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leqslant 1.$$

Définition 12.6

Pour tous vecteurs x, y non nuls, l'angle non orienté des vecteurs x et y est l'unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ satisfaisant

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}.$$

- On récupère la formule bien connue :

$$\langle x, y\rangle = |x||y| \cos \alpha. \tag{12.6}$$

- Pour bien faire, il faudrait que le cosinus soit défini de manière analytique et non géométrique. C'est en fait une série (voir le cours Mathématiques Générales).

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (1, 0, 0, 1)^\sim$ et $y = (1, 0, 1, 0)^\sim$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (2, 2)^\sim$ et $y = (0, 1)^\sim$.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire non standard défini à la page 4, les vecteurs $x = (1, 0)^\sim$ et $y = (0, 1)$ satisfont
$$|x| = \sqrt{7}, \quad |y| = \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \langle x, y\rangle = 2,$$
leur angle non orienté $\alpha \in [0, \pi]$ satisfait donc
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$
4. Pour ce même produit scalaire, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (0, 1)^\sim$ et $y = (1, -1)^\sim$.

Orthogonalité

Définition 12.7

Des vecteurs u et v sont orthogonaux[1] si $\langle u, v\rangle = 0$.

Proposition 12.8

Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ des vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux, i.e. tels que $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}|u_i|^2$ pour $i, j \leqslant p$. Alors on a

1. *Si $u \in E$ est tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$, alors on a $\lambda_i = \frac{\langle u, u_i\rangle}{|u_i|^2}$ $(i \leqslant p)$;*
2. *Les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants.*

1. On dit aussi perpendiculaires.

Bases orthonormées

Définition 12.9

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Une base orthonormée de E est une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et normés ($\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \leqslant n$).

Exemples : dans $\mathbb{R}^n$, la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée pour le produit scalaire standard.

Proposition 12.10

Une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée si, et seulement si, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i u_i$ est donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \tag{12.7}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Existence : processus de Gram-Schmidt

Nous démontrerons que tout espace vect. de dimension finie admet une base orthonormée.

Proposition 12.11 (Processus de Gram-Schmidt)

Tout espace vectoriel euclidien E de dimension finie admet une base orthonormée. De plus si $u_1, \ldots, u_n$ est une base de E, il existe une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que $\rangle v_1, \ldots, v_k \langle = \rangle u_1, \ldots, u_k \langle$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Preuve : récurrence sur la dimension n de E.

- Pour $n = 1$, on a une base (u_1) et $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$ convient.
- Induction : Soit $u_1, \ldots, u_n$ une base de E. Alors $\rangle u_1, \ldots, u_{n-1} \langle$ est un espace vectoriel euclidien pour le même produit scalaire.
- Il existe $v_1, \ldots, v_{n-1}$ satisfaisant $\rangle v_1, \ldots, v_k \langle = \rangle u_1, \ldots, u_k \langle$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.
- On pose $v_n' = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_n, v_i \rangle v_i \neq 0$ et $v_n = \frac{v_n'}{|v_n'|}$.

Orientation d'un espace vectoriel

Le monde des bases se divise en deux catégories : celles qui ont un pistolet chargé ... Non c'est pas ça :

Définition 12.12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Deux bases ont la même orientation si la matrice de changement de base est à déterminant positif.
- Deux bases ont une orientation différente si cette matrice est à déterminant négatif.

Il y a donc deux ensembles de bases.

Définition 12.13

Orienter l'espace, c'est choisir un de ces ensembles de bases, et déclarer qu'elles sont positives.

Produit mixte de trois vecteurs

On se place dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Définition 12.14

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base orthonormée positive de E. Le produit mixte des vecteurs u, v, w est défini par

$$[u, v, w] = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

où $(u_1, u_2, u_3)^\sim$, $(v_1, v_2, v_3)^\sim$ et $(w_1, w_2, w_3)^\sim$ sont respectivement les composantes de u, v et w dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 12.15

La définition est indépendante du choix de la base orthonormée positive $\mathcal{B}$ utilisée pour faire le calcul.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 12.16

Le produit mixte a les propriétés suivantes.

1. *Il est trilinéaire, c'est à dire linéaire en chaque argument, les autres étant fixés ;*
2. *Il est alterné : il change de signe si on permute deux de ses arguments ;*
3. *On a $[u, v, w] = 0$ si, et seulement si, u, v et w sont linéairement dépendants.*
4. *On a $[u, v, w] > 0$ (resp. < 0) si, et seulement si, (u, v, w) est une base positive.*

Produit vectoriel de deux vecteurs

Proposition 12.17

Pour tous $u, v \in E$, il existe un unique vecteur a satisfaisant la relation

$$[u, v, w] = \langle a, w \rangle$$

pour tout $w \in E$. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée positive, dans laquelle u et v ont pour composantes $(u_1, u_2, u_3)^\sim$ et v : $(v_1, v_2, v_3)^\sim$, alors a admet pour composantes

$$\left(\det\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right)^\sim. \tag{12.8}$$

Définition 12.18

Le produit vectoriel des vecteurs u et v est le vecteur a défini par la proposition précédente. Il est noté $u \wedge v$.

Propriétés et caractérisation

Proposition 12.19

L'opération produit vectoriel a les propriétés suivantes :

1. *Elle est antisymétrique ou alternée : on a* $u \wedge v = v \wedge u$ *pour tout* $u, v \in E$.
2. *Elle est bilinéaire, c'est à dire linéaire sur chacun de ses arguments, l'autre étant fixé ;*

Proposition 12.20

Soient u, v *des vecteurs de* E. *Alors*

1. *Le produit vectoriel* $u \wedge v$ *est orthogonal à* u *et à* v *;*
2. *Le produit vectoriel* $u \wedge v$ *est nul si, et seulement si* u *et* v *sont linéairement dépendants.*
3. *Si* u *et* v *sont non nuls, on a* $|u \wedge v| = |u||v| \sin \alpha$ *où* α *est l'angle non orienté entre* u *et* v *;*
4. *Si* u *et* v *sont linéairement indépendants, alors* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base positive.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Symbole de Levi-civita

Si (b_1, b_2, b_3) est une base orthonormée positive, alors on a

$$b_i \wedge b_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} b_k$$

où

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (2,1,3),(1,3,2),(3,2,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce symbole est appelé symbole de Levi-Civita[2]. Il permet de calculer le produit vectoriel : si $u = \sum_{i=1}^{3} u_i b_i$ et $v = \sum_{i=1}^{3} v_i b_i$, alors

$$u \wedge v = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j b_k.$$

2. Tullio Levi-Civita (1873-1941), inventeur du calcul tensoriel (avec Ricci) vers 1900

Double produit vectoriel

Proposition 12.21

On a les formules suivantes

- $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$,
- $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$,

quels que soient $u, v, w \in E$.

- En français : "Le double produit vectoriel vaut le vecteur au milieu fois le produit scalaire des deux autres, moins le deuxième vecteur de la parenthèse, fois le produit scalaire des deux autres".
- **Preuve :** calcul "à la main" pour tous les vecteurs de base ou avec le symbole de Levi-Civita.