Université de Liège

Espaces vectoriels euclidiens : orthogonalité, projections, angle orienté dans le plan

Présentation provisoire

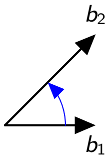
Pierre Mathonet

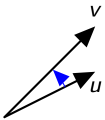
Département de Mathématique
Faculté des Sciences

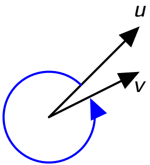
Liège, le 19 mars 2014

Angle orienté du plan

- Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2.
- La donnée de l'orientation définit un sens “de rotation”. Si $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ est une base positive, le sens positif consiste à “aller de b_1 vers b_2.







Définition 13.1

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté entre u et v est l'unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

- $\cos(\theta) = \cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$ (α est l'angle non orienté entre u et v)
- $\sin(\theta)$ est positif (strictement) si, et seulement si (u, v) est une base positive.

Calcul explicite et exemples

Proposition 13.2

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté θ entre u et v est défini par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}{|u||v|}$$

si u et v ont pour composantes $(u_1, u_2)^\sim$ et $(v_1, v_2)^\sim$ dans une base orthonormée positive.

Preuve :

- $\sin(\theta)$ est positif ssi $\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ est positif.
- Calcul de $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

Une équation vectorielle (suite du produit vectoriel)

- Soit $a \neq 0$ et $b \in E$, espace vectriel euclidien orienté de dimension 3.
- On cherche les solution de l'équation

$$a \wedge x = b. \tag{13.1}$$

- On peut l'écrire dans une B.O. positive.

Proposition 13.3

L'équation (13.1) est compatible si, et seulement si, $\langle a, b\rangle = 0$. *Dans ce cas l'ensemble des solutions est*

$$S = \{-\frac{1}{|a|^2} a \wedge b + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve : Si le sys. est compatible, $b = a \wedge x_0$, alors b est orthogonal à a. Si b est orthogonal à a, on vérifie que les solutions proposées sont des solutions et que toutes les solutions sont de cette forme.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Complément orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Définition 13.4

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, le *complément orthogonal* de F est l'ensemble

$$F^{\perp} = \{u \in E : \langle u, f \rangle = 0, \quad \forall f \in F\}.$$

De plus $F \perp G$ si $F \subset G^{\perp}$ ou $G \subset F^{\perp}$.

Proposition 13.5

Pour tout sous-espace vectoriel F de E,

1. *L'ensemble $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel ;*
2. *On a $E = F \oplus F^{\perp}$;*
3. *On a $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$;*
4. *On a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Preuve : 1) Classique 2) fixer une base dont les premiers élém sont dans F, orthogonaliser. On obtient une B.O. $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une B.O. de F.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

Définition 13.6

Pour tout $u \in E$, on a la décomposition unique $u = u_F + u_{F^\perp}$. La projection orthogonale de u sur F est u_F.

Proposition 13.7

Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F, alors la projection orthogonale d'un vecteur u sur F est donnée par

$$u_F = \langle u, f_1 \rangle f_1 + \cdots + \langle u, f_p \rangle f_p.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Droites et hyperplans

Proposition 13.8

Si F est une droite vectorielle engendrée par f, alors la projection orthogonale de u sur F est

$$u_d = \frac{\langle u, f\rangle}{|f|^2} f.$$

Définition 13.9

Si π est un hyperplan vectoriel, on appelle *normale à* π tout vecteur directeur de $\pi^\perp$.

Proposition 13.10

Si π est un hyperplan vectoriel de normale N, alors la projection orthogonale de u sur π est

$$u_\pi = u - \frac{\langle u, N\rangle}{|N|^2} N.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equation normale d'un hyperplan et orthogonalité

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, et π un hyperplan.

Proposition 13.11

Alors $N : (a_1, \ldots, a_n)$ est normal à π ssi l'hyperplan π admet l'équation cartésienne

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

Preuve : On a $\pi^\perp = \rangle N \langle$ ssi $\pi = \rangle N \langle^\perp$ ssi

$$\pi = \{u \in E : \langle N, u \rangle = 0\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.