Université de Liège

Espaces vectoriels euclidiens : orthogonalité, projections, angle orienté dans le plan

Présentation provisoire

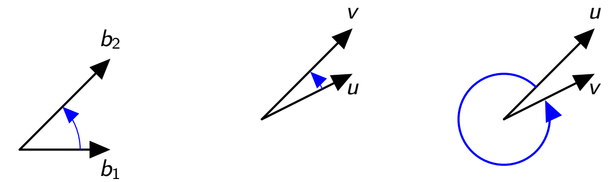
Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 19 mars 2014

Angle orienté du plan

- Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2.
- La donnée de l'orientation définit un sens "de rotation". Si $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ est une base positive, le sens positif consiste à "aller de b_1 vers b_2.



Définition 13.1

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté entre u et v est l'unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

- $\cos(\theta) = \cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$ (α est l'angle non orienté entre u et v)
- $\sin(\theta)$ est positif (strictement) si, et seulement si (u, v) est une base positive.

Calcul explicite et exemples

Proposition 13.2

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté θ entre u et v est défini par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}{|u||v|}$$

si u et v ont pour composantes $(u_1, u_2)^\sim$ et $(v_1, v_2)^\sim$ dans une base orthonormée positive.

Preuve :

- $\sin(\theta)$ est positif ssi $\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ est positif.
- Calcul de $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

Une équation vectorielle (suite du produit vectoriel)

- Soit $a \neq 0$ et $b \in E$, espace vectriel euclidien orienté de dimension 3.
- On cherche les solution de l'équation

$$a \wedge x = b. \tag{13.1}$$

- On peut l'écrire dans une B.O. positive.

Proposition 13.3

L'équation (13.1) est compatible si, et seulement si, $\langle a, b\rangle = 0$. Dans ce cas l'ensemble des solutions est

$$S = \{-\frac{1}{|a|^2} a \wedge b + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve : Si le sys. est compatible, $b = a \wedge x_0$, alors b est orthogonal à a. Si b est orthogonal à a, on vérifie que les solutions proposées sont des solutions et que toutes les solutions sont de cette forme.

Complément orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Définition 13.4

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, le *complément orthogonal* de F est l'ensemble

$$F^\perp = \{u \in E : \langle u, f\rangle = 0, \quad \forall f \in F\}.$$

De plus $F \perp G$ si $F \subset G^\perp$ ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 13.5

Pour tout sous-espace vectoriel F de E,

1. *L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel ;*
2. *On a $E = F \oplus F^\perp$;*
3. *On a $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$;*
4. *On a $(F^\perp)^\perp = F$.*

Preuve : 1) Classique 2) fixer une base dont les premiers élém sont dans F, orthogonaliser. On obtient une B.O. $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une B.O. de F.

Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

Définition 13.6

Pour tout $u \in E$, on a la décomposition unique $u = u_F + u_{F^\perp}$. La projection orthogonale de u sur F est u_F.

Proposition 13.7

Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F, alors la projection orthogonale d'un vecteur u sur F est donnée par

$$u_F = \langle u, f_1\rangle f_1 + \cdots + \langle u, f_p\rangle f_p.$$

Droites et hyperplans

Proposition 13.8

Si F est une droite vectorielle engendrée par f, alors la projection orthogonale de u sur F est

$$u_d = \frac{\langle u, f\rangle}{|f|^2} f.$$

Définition 13.9

Si π est un hyperplan vectoriel, on appelle *normale à* π tout vecteur directeur de $\pi^\perp$.

Proposition 13.10

Si π est un hyperplan vectoriel de normale N, alors la projection orthogonale de u sur π est

$$u_\pi = u - \frac{\langle u, N\rangle}{|N|^2} N.$$

Equation normale d'un hyperplan et orthogonalité

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, et π un hyperplan.

Proposition 13.11

Alors $N : (a_1, \ldots, a_n)$ est normal à π ssi l'hyperplan π admet l'équation cartésienne

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

Preuve : On a $\pi^\perp = \rangle N\langle$ ssi $\pi = \rangle N\langle^\perp$ ssi

$$\pi = \{u \in E : \langle N, u\rangle = 0\}.$$