



Espaces affines euclidiens

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 20 mars 2014

Définitions : espaces affines euclidiens, repères orthonormés

Définition 14.1

Un espace affine euclidien \mathcal{A} (resp. orienté) est un espace affine modelé sur un espace vectoriel euclidien (resp. orienté).

Définition 14.2

Un repère orthonormé (resp. positif) est un repère $(O, (b_1, \dots, b_n))$ tel que la base (b_1, \dots, b_n) soit orthonormée (resp. positive).

Proposition 14.3

Les coordonnées d'un point P dans un repère orthonormé $(O, (b_1, \dots, b_n))$ sont données par

$$P : (\langle \overrightarrow{OP}, b_1 \rangle, \dots, \langle \overrightarrow{OP}, b_n \rangle) \sim .$$

Distance euclidienne

Définition 14.4

La distance euclidienne du point P au point Q de \mathcal{A} , notée $d(P, Q)$ est définie par

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Proposition 14.5

On a

- 1 $d(P, Q) = d(Q, P)$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$;
- 2 $d(P, Q) \geq 0$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $d(P, P) = 0$;
- 3 $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ pour tous $P, Q, R \in \mathcal{A}$;
- 4 $d(P, Q) = 0$ si et seulement si $P = Q$.

Théorème de Pythagore et consorts, distances

Proposition 14.6

Soit un triangle A, B, C . On a alors

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 - 2|\vec{AC}||\vec{CB}| \cos \alpha$$

où α est l'angle non orienté entre \vec{CA} et \vec{CB} . En particulier, le triangle est rectangle en C si et seulement si on a

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2.$$

Proposition 14.7

Si les coordonnées de P et Q dans un repère orthonormé sont $(p_1, \dots, p_n)^\sim$ et $(q_1, \dots, q_n)^\sim$, alors la distance $d(P, Q)$ est donnée par

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}.$$

Variétés affines orthogonales

Définition 14.8

Les variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont orthogonales si leurs sous-espaces vectoriels directeurs $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}'}$ sont orthogonaux. On note $\mathcal{V} \perp \mathcal{V}'$.

- Les droites $d = A + \langle u \rangle$ et $d' = A' + \langle v \rangle$ sont orthogonales si, et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$.
- Si $u : (u_1, \dots, u_n) \sim$ et $v : (v_1, \dots, v_n) \sim$ dans *une base orthonormée*, alors on a $d \perp d'$ si, et seulement si $u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = 0$.
- En dimension 3, la droite $d = A + \langle u \rangle$ et le plan $\pi = B + \langle v, w \rangle$ sont orthogonaux si, et seulement si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$.
- On a aussi $d \perp \pi$ si, et seulement si $\vec{d} = \vec{\pi}^\perp$.
- Si dans un repère orthonormé $\pi \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ et $u : (u_1, u_2, u_3) \sim$ (dans la base associée) alors on a $d \perp \pi$ si et seulement si (u_1, u_2, u_3) est multiple de (a_1, a_2, a_3) .
- En dimension 3, deux plans ne sont jamais orthogonaux.

Projections orthogonales

Proposition 14.9

Soit $\mathcal{V} = A + \vec{\mathcal{V}}$ une variété affine et $P \in \mathcal{A}$. Il existe un unique point $P' \in \mathcal{V}$ tel que $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{\mathcal{V}}$. De plus, on a $P' = A + p_{\vec{\mathcal{V}}}(\overrightarrow{AP}) = P - p_{\vec{\mathcal{V}}^\perp}(\overrightarrow{AP})$.

Preuve : Existence-décomposer \overrightarrow{AP} selon $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}}^\perp$. Unicité : $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{V}}^\perp = \vec{\mathcal{A}}$.

Définition 14.10

L'unique point P' défini par la proposition précédente est appelé projection orthogonale de P sur \mathcal{V} . Il est noté $p_{\vec{\mathcal{V}}}^\perp(P)$ ou $p_{\mathcal{V}}(P)$.

Proposition 14.11

La projection orthogonale de P sur \mathcal{V} est l'unique point P' d'intersection des variétés affines orthogonales \mathcal{V} et $P + \mathcal{V}^\perp$.

Projection sur des droites et hyperplans

Proposition 14.12

Soit π l'hyperplan déterminé par le point A et le vecteur normal N , c'est à dire

$$\pi = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{AX}, N \rangle = 0\}$$

et $P \in \mathcal{A}$. Alors on a

$$P' = P - \frac{\langle \overrightarrow{AP}, N \rangle}{|N|^2} N.$$

Proposition 14.13

Soit $d = A + \langle u \rangle$ et soit $P \in \mathcal{A}$. La projection orthogonale de P sur d est le point

$$P' = A + \frac{\langle \overrightarrow{AP}, u \rangle}{|u|^2} u.$$

Deux exercices

- ① Dans un esp. aff. euclidien de dim 3 muni d'un R.O., on considère $P : (1, 2, 3)^\sim$

$$\pi \equiv 3x + 2y - z = 4.$$

- ① Ecrire une éq. cartésienne de la droite normale à π et passant par P .
 - ② Ecrire une équation paramétrique de cette droite.
 - ③ Déterminer les coordonnées de la projection de P sur π .
 - ④ Déterminer un point $A \in \pi$.
 - ⑤ Appliquer la formule donnant la projection orthogonale de P sur π .
- ② Dans un esp. aff. euclidien de dim 3 muni d'un R.O., on considère

$$A : (1, 2, 0)^\sim, \quad B : (0, 1, 3), \quad C : (2, 4, 1).$$

- ① Ecrire une équation cartésienne du plan ABC .
- ② Déterminer une équation cartésienne de la normale à ce plan contenant A .
- ③ Déterminer une équation du plan orthogonal à AB et contenant C .
- ④ Déterminer les coord. de la projection orthogonale de C sur AB .