



Théorie des courbes, une introduction

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 23 avril 2014

Quelques exemples

On se donne une fonction définie sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans un espace affine. Si on fixe un repère (orthonormé), on a alors n fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n . Voici quelques exemples bien connus :

- 1 $\gamma_1 :]0, \pi[\rightarrow \mathcal{A} : \alpha \mapsto (R \cos(\alpha), R \sin(\alpha))$;
- 2 $\gamma_2 :]-R, R[\rightarrow \mathcal{A} : x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$;
- 3 $\gamma_3 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathcal{A} : \theta \mapsto (R \sin(\theta), R \cos(\theta))$.

Ce sont trois paramétrages du même demi-cercle (si \mathcal{A} est affine euclidien muni d'un repère orthonormé).

On peut imaginer n'importe quoi :

- 1 $\gamma_4 :]0, 2\pi[\rightarrow \mathcal{A} : \alpha \mapsto (1 + \cos(\alpha))(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$;
- 2 $\gamma_5 :]0, 4\pi[\rightarrow \mathcal{A} : \theta \mapsto (\sin(3\theta), \sin(4\theta))$.

La première est une cardioïde, la seconde une courbe de Lissajous.

Fonctions à valeurs dans un espace affine, ou vectoriel

Définition 17.1

Une application P définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine \mathcal{A} est continue (resp. dérivable, de classe C_p) si il existe un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \dots, b_n))$ tel que les coordonnées de P soient des fonctions continues (resp. dérivables, de classe C_p).

Proposition 17.2

Soit $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ une application. Si les coordonnées de P dans un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \dots, b_n))$, sont continues (resp. dérivables, de classe C_p), alors les coordonnées de P dans tout repère le sont également.

Définition 17.3

La même définition vaut pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel, et la même proposition également, modulo le remplacement de “repère” par “base”.

Dérivées

Définition 17.4

Soit $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ une application dérivable en un point $u_0 \in \Omega$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère dans lequel

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}.$$

Alors la dérivée de P en u_0 est le **vecteur** donné dans la base \mathcal{B} par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) : \begin{pmatrix} D_u x_1(u_0) \\ \vdots \\ D_u x_n(u_0) \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

Proposition 17.5

La définition est indépendante du choix du repère dans lequel on calcule la dérivée : $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$ se transforme comme un vecteur.

Preuve

Si dans le repère \mathcal{R} l'application $P : u \mapsto P(u)$ s'exprime en coordonnées par

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

alors dans un autre repère \mathcal{R}' , on a

$$P(u) : \begin{pmatrix} y_1(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions y_j sont obtenues en fonction de x_1, \dots, x_n par la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} y_1(u) &= a_{11}x_1(u) + \dots + a_{1n}x_n(u) + c_1 \\ \vdots &= \vdots \\ y_n(u) &= a_{n1}x_1(u) + \dots + a_{nn}x_n(u) + c_n, \end{cases} \quad (17.3)$$

où les coefficients $a_{11}, \dots, a_{nn}, c_1, \dots, c_n$ sont des constantes.

Remarques

- 1 On a des définitions analogues pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel. On considère les composantes dans une base donnée ;
- 2 Si on devait considérer une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^k avec $k > 1$, la même définition permettrait de définir les dérivées partielles ;
- 3 On aurait pu définir la dérivée par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(u_0 + h) - P(u_0)}{h}.$$

On aurait obtenu le même résultat, mais il aurait fallu définir la notion de limite pour une telle fonction, ce qui reportait le problème.

Quelques résultats sur la dérivation I

Proposition 17.6

Si f, g, h sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables alors

$$D_u(\langle f(u), g(u) \rangle) = \langle D_u f(u), g(u) \rangle + \langle f(u), D_u g(u) \rangle, \quad \forall u \in \Omega.$$

En particulier, si $|f(u)| = C \quad \forall u \in \Omega$, alors $\langle D_u f(u), f(u) \rangle = 0$.

Si E est euclidien orienté de dimension 3, alors

$$D_u(f(u) \wedge g(u)) = D_u f(u) \wedge g(u) + f(u) \wedge D_u g(u),$$

et

$$D_u[f(u), g(u), h(u)] = [D_u f(u), g(u), h(u)] + [f(u), D_u g(u), h(u)] \\ + [f(u), g(u), D_u h(u)].$$

Quelques résultats sur la dérivation II

Proposition 17.7

Si f, g sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables et telles que

$$\langle f(u), g(u) \rangle = C \quad \forall u \in \Omega,$$

alors on a

$$\langle D_u f(u), g(u) \rangle = -\langle f(u), D_u g(u) \rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

Si P est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans \mathcal{A} ou E , dérivable, et si $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$ est dérivable, alors $P \circ \varphi$ est dérivable et on a

$$\overrightarrow{D_{u'} P \circ \varphi}(u'_0) = \overrightarrow{D_u P}(u)|_{u=\varphi(u'_0)} D_{u'} \varphi(u'_0).$$

Paramétrages et arcs réguliers

Définition 17.8

Un paramétrage de classe C_p d'un arc régulier de courbe est un couple (Ω, P) où

- Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} ;
- $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ est une application de classe C_k ;
- On a $\overrightarrow{D_u P}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

Un *arc régulier de courbe* est l'image d'un paramétrage.

Exemples : γ_1, γ_2 et γ_3 définissent des paramétrages d'arcs réguliers, mais pas γ_4 , car par exemple

$$D_\alpha \gamma_1(\alpha) = (-R \sin(\alpha), R \cos(\alpha)) \neq (0, 0), \text{ pour tout } \alpha \in]0, \pi[,$$

mais

$$D_\alpha \gamma_4(\alpha) = -\sin(\alpha)(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + (1 + \cos(\alpha))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

s'annule en $\alpha = \pi$.

Paramétrages équivalents : exemples

- Les paramétrages γ_1 , γ_2 et γ_3 définissent le même arc régulier de courbe.
- On a juste changé de paramètre :
 - ① $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R \cos(\alpha))$;
 - ② $\gamma_2(x) = \gamma_1(\arccos(\frac{x}{R}))$;

On a une correspondance de paramètres :

$$x = R \cos(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = \varphi^{-1}(x).$$

De même :

- ① $\gamma_1(\alpha) = \gamma_3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
- ② $\gamma_3(\theta) = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$;

et

- ① $\gamma_2(x) = \gamma_3\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)$;
- ② $\gamma_3(\theta) = \gamma_2(R \sin(\theta))$.

Définition 17.9

Deux paramétrages de classe C_p (Ω, P) et (Ω', Q) d'un arc régulier de courbe sont équivalents s'il existe un changement de variable de classe C_p $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$ tel que

$$Q(u') = P \circ \varphi(u') \quad \forall u' \in \Omega'.$$

Remarques :

- 1 la condition précédente se lit $Q = P \circ \varphi$, mais aussi $P = Q \circ \varphi^{-1}$;
- 2 On écrit parfois $P(u')$ au lieu de $Q(u')$;
- 3 On voit aussi parfois la notation suivante :

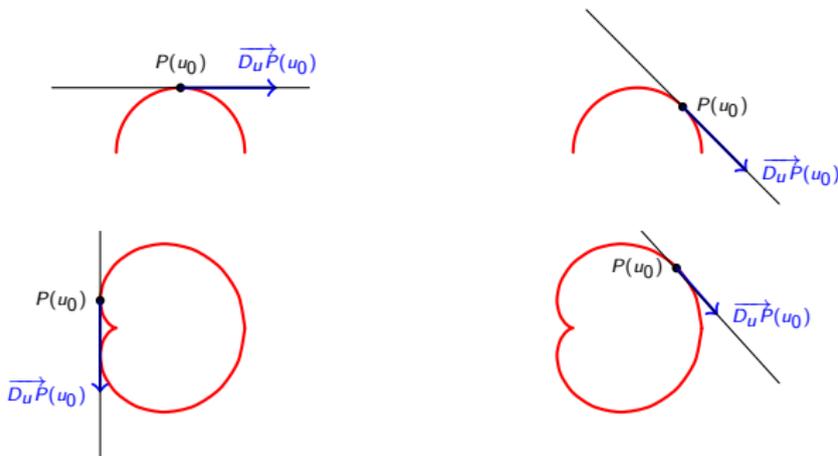
$$P = P(u), \quad u = u(u') \quad \text{donc} \quad P = P(u') = P(u(u')).$$

- 4 Pour associer un objet géométrique à l'arc régulier de courbe défini par une classe de paramétrage équivalents, il faut vérifier que cet objet ne dépend pas du paramétrage choisi pour le définir.

Tangente en un point d'un arc régulier

Définition 17.10

La tangente en un point $P(u_0)$ d'un A.R.C Γ est la droite passant par $P(u_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{D_u \dot{P}}(u_0)$.



Proposition 17.11

Cette définition est indépendante du paramétrage.