



# Théorie des courbes, une introduction

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 23 avril 2014

## Quelques exemples

On se donne une fonction définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans un espace affine. Si on fixe un repère (orthonormé), on a alors  $n$  fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Voici quelques exemples bien connus :

- 1  $\gamma_1 : ]0, \pi[ \rightarrow \mathcal{A} : \alpha \mapsto (R \cos(\alpha), R \sin(\alpha))$  ;
- 2  $\gamma_2 : ]-R, R[ \rightarrow \mathcal{A} : x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$  ;
- 3  $\gamma_3 : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathcal{A} : \theta \mapsto (R \sin(\theta), R \cos(\theta))$ .

Ce sont trois paramétrages du même demi-cercle (si  $\mathcal{A}$  est affine euclidien muni d'un repère orthonormé).

On peut imaginer n'importe quoi :

- 1  $\gamma_4 : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathcal{A} : \alpha \mapsto (1 + \cos(\alpha))(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  ;
- 2  $\gamma_5 : ]0, 4\pi[ \rightarrow \mathcal{A} : \theta \mapsto (\sin(3\theta), \sin(4\theta))$ .

La première est une cardioïde, la seconde une courbe de Lissajous.

# Fonctions à valeurs dans un espace affine, ou vectoriel

## Définition 17.1

Une application  $P$  définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans un espace affine  $\mathcal{A}$  est continue (resp. dérivable, de classe  $C_p$ ) si il existe un repère  $\mathcal{R} = (O, (b_1, \dots, b_n))$  tel que les coordonnées de  $P$  soient des fonctions continues (resp. dérivables, de classe  $C_p$ ).

## Proposition 17.2

*Soit  $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  une application. Si les coordonnées de  $P$  dans un repère  $\mathcal{R} = (O, (b_1, \dots, b_n))$ , sont continues (resp. dérivables, de classe  $C_p$ ), alors les coordonnées de  $P$  dans tout repère le sont également.*

## Définition 17.3

La même définition vaut pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel, et la même proposition également, modulo le remplacement de “repère” par “base”.

# Dérivées

## Définition 17.4

Soit  $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  une application dérivable en un point  $u_0 \in \Omega$ . Soit  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  un repère dans lequel

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}.$$

Alors la dérivée de  $P$  en  $u_0$  est le **vecteur** donné dans la base  $\mathcal{B}$  par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) : \begin{pmatrix} D_u x_1(u_0) \\ \vdots \\ D_u x_n(u_0) \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

## Proposition 17.5

*La définition est indépendante du choix du repère dans lequel on calcule la dérivée :  $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$  se transforme comme un vecteur.*

## Preuve

Si dans le repère  $\mathcal{R}$  l'application  $P : u \mapsto P(u)$  s'exprime en coordonnées par

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

alors dans un autre repère  $\mathcal{R}'$ , on a

$$P(u) : \begin{pmatrix} y_1(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions  $y_j$  sont obtenues en fonction de  $x_1, \dots, x_n$  par la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} y_1(u) &= a_{11}x_1(u) + \dots + a_{1n}x_n(u) + c_1 \\ \vdots &= \vdots \\ y_n(u) &= a_{n1}x_1(u) + \dots + a_{nn}x_n(u) + c_n, \end{cases} \quad (17.3)$$

où les coefficients  $a_{11}, \dots, a_{nn}, c_1, \dots, c_n$  sont des constantes.

## Remarques

- 1 On a des définitions analogues pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel. On considère les composantes dans une base donnée ;
- 2 Si on devait considérer une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  avec  $k > 1$ , la même définition permettrait de définir les dérivées partielles ;
- 3 On aurait pu définir la dérivée par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(u_0 + h) - P(u_0)}{h}.$$

On aurait obtenu le même résultat, mais il aurait fallu définir la notion de limite pour une telle fonction, ce qui reportait le problème.

## Quelques résultats sur la dérivation I

### Proposition 17.6

*Si  $f, g, h$  sont des fonctions de  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dans  $E$  (e.v. euclidien), dérivables alors*

$$D_u(\langle f(u), g(u) \rangle) = \langle D_u f(u), g(u) \rangle + \langle f(u), D_u g(u) \rangle, \quad \forall u \in \Omega.$$

*En particulier, si  $|f(u)| = C \quad \forall u \in \Omega$ , alors  $\langle D_u f(u), f(u) \rangle = 0$ .*

*Si  $E$  est euclidien orienté de dimension 3, alors*

$$D_u(f(u) \wedge g(u)) = D_u f(u) \wedge g(u) + f(u) \wedge D_u g(u),$$

*et*

$$D_u[f(u), g(u), h(u)] = [D_u f(u), g(u), h(u)] + [f(u), D_u g(u), h(u)] \\ + [f(u), g(u), D_u h(u)].$$

## Quelques résultats sur la dérivation II

### Proposition 17.7

Si  $f, g$  sont des fonctions de  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dans  $E$  (e.v. euclidien), dérivables et telles que

$$\langle f(u), g(u) \rangle = C \quad \forall u \in \Omega,$$

alors on a

$$\langle D_u f(u), g(u) \rangle = -\langle f(u), D_u g(u) \rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

Si  $P$  est une fonction de  $\Omega \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathcal{A}$  ou  $E$ , dérivable, et si  $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  est dérivable, alors  $P \circ \varphi$  est dérivable et on a

$$\overrightarrow{D_{u'} P \circ \varphi}(u'_0) = \overrightarrow{D_u P}(u)|_{u=\varphi(u'_0)} D_{u'} \varphi(u'_0).$$



## Paramétrages et arcs réguliers

### Définition 17.8

Un paramétrage de classe  $C_p$  d'un arc régulier de courbe est un couple  $(\Omega, P)$  où

- $\Omega$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  ;
- $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  est une application de classe  $C_k$  ;
- On a  $\overrightarrow{D_u P}(u) \neq 0$  pour tout  $u \in \Omega$ .

Un *arc régulier de courbe* est l'image d'un paramétrage.

Exemples :  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  définissent des paramétrages d'arcs réguliers, mais pas  $\gamma_4$ , car par exemple

$$D_\alpha \gamma_1(\alpha) = (-R \sin(\alpha), R \cos(\alpha)) \neq (0, 0), \text{ pour tout } \alpha \in ]0, \pi[,$$

mais

$$D_\alpha \gamma_4(\alpha) = -\sin(\alpha)(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + (1 + \cos(\alpha))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

s'annule en  $\alpha = \pi$ .

## Paramétrages équivalents : exemples

- Les paramétrages  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  définissent le même arc régulier de courbe.
- On a juste changé de paramètre :
  - ①  $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R \cos(\alpha))$ ;
  - ②  $\gamma_2(x) = \gamma_1(\arccos(\frac{x}{R}))$ ;

On a une correspondance de paramètres :

$$x = R \cos(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = \varphi^{-1}(x).$$

De même :

- ①  $\gamma_1(\alpha) = \gamma_3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;
- ②  $\gamma_3(\theta) = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ;

et

- ①  $\gamma_2(x) = \gamma_3\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)$ ;
- ②  $\gamma_3(\theta) = \gamma_2(R \sin(\theta))$ .

## Définition 17.9

Deux paramétrages de classe  $C_p$   $(\Omega, P)$  et  $(\Omega', Q)$  d'un arc régulier de courbe sont équivalents s'il existe un changement de variable de classe  $C_p$   $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  tel que

$$Q(u') = P \circ \varphi(u') \quad \forall u' \in \Omega'.$$

Remarques :

- 1 la condition précédente se lit  $Q = P \circ \varphi$ , mais aussi  $P = Q \circ \varphi^{-1}$ ;
- 2 On écrit parfois  $P(u')$  au lieu de  $Q(u')$ ;
- 3 On voit aussi parfois la notation suivante :

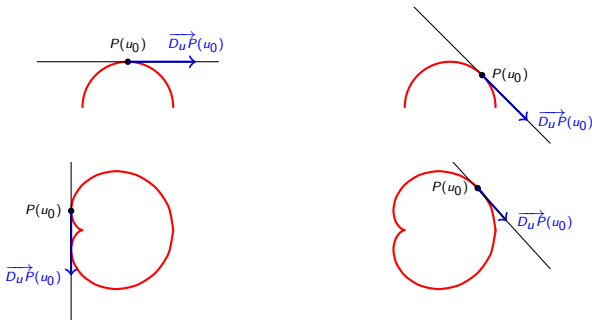
$$P = P(u), \quad u = u(u') \quad \text{donc} \quad P = P(u') = P(u(u')).$$

- 4 Pour associer un objet géométrique à l'arc régulier de courbe défini par une classe de paramétrage équivalents, il faut vérifier que cet objet ne dépend pas du paramétrage choisi pour le définir.

# Tangente en un point d'un arc régulier

## Définition 17.10

La tangente en un point  $P(u_0)$  d'un A.R.C  $\Gamma$  est la droite passant par  $P(u_0)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$ .



## Proposition 17.11

*Cette définition est indépendante du paramétrage.*