Université de Liège

Longueur d'arc, abscisse curviligne, trièdre et formules de Frenet

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 30 avril 2014

Orientation

- Un paramétrage définit un sens de parcours de l'A.R.C.
- Si (Ω, P) est un paramétrage, alors $P(u_1)$ est avant $P(u_2)$ si $u_1 < u_2$.
- Le monde des paramétrages équivalents d'un A.R.C. se divise en deux catégories (sous-ensembles) :

Définition 18.1

Un paramétrage (Ω, P) et un paramétrage équivalent $(\Omega', Q = P \circ \varphi)$ définissent la même orientation si $D_v\varphi(v) > 0$ pour tout $v \in \Omega'$. Dans le cas contraire, ils définissent une orientation différente.

Exemple : $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$. Le changement de variable est défini par

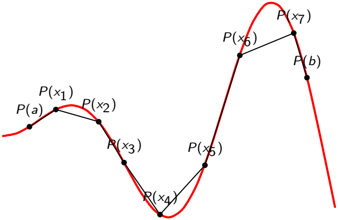
$$\varphi(\alpha) = R\cos(\alpha)$$

et tel que $D_\alpha\varphi(\alpha)$ est négatif sur $]0, \pi[$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$:



Définition 18.2

La longueur de l'arc de courbe déterminé par (Ω, P) entre $P(a)$ et $P(b)$ est le nombre

$$\sup_{D=[a=x_0,x_1,\ldots,x_n,b=x_{n+1}]} \sum_{i=1}^{n+1} |P(x_i) - P(x_{i-1})|$$

quand cette borne supérieure existe (auquel cas l'arc de courbe est dit rectifiable).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Calcul explicite et abscisse curviligne

Proposition 18.3

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et si $a < b$ sont dans Ω, alors la longueur d'arc entre $P(a)$ et $P(b)$ vaut

$$\int_a^b |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Ce résultat est admis, mais généralise le cas du graphe d'une fonction vu en analyse.

Définition 18.4

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et u_0 in Ω. L'ascisse curviligne $s(u)$ de $P(u)$ est la longueur d'arc entre $P(u_0)$ et $P(u)$ si $u_0 < u$ et l'opposé de cette longueur d'arc si $u < u_0$.

Propriétés fondamentales de l'abscisse curviligne

Proposition 18.5 (Calcul explicite)

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1, alors l'abscisse curviligne de $P(u)$ vaut

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Proposition 18.6 (Changement de variable)

L'abscisse curviligne est une fonction a dérivée strictement positive : on a

$$D_u s(u) = |\overrightarrow{D_u P}(u)| > 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

Elle définit donc un changement de variable $s : \Omega \to s(\Omega)$.
Le changement de variable inverse, noté $u = u(s)$ est tel que

$$D_s u(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{D_u P}(u)|}\Big|_{u=u(s)}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Paramétrages naturels

Définition 18.7

Un paramétrage (Ω, P) est naturel si on a $|\overrightarrow{D_u P(u)}| = 1$, pour tout $u \in \Omega$.

Proposition 18.8

Tout paramétrage (Ω, P) est équivalent à un paramétrage naturel.

Preuve : le paramétrage par l'abscisse curviligne, dans une orientation donnée est naturel.
Exemple : Le paramétrage

$$P(u) = (R\cos(u), R\sin(u)), \quad s \in]0, \pi[$$

n'est pas naturel mais le parmétrage

$$\gamma(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R})), \quad s \in]0, \pi R[,$$

est naturel.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Vecteur tangent unitaire

Soit (Ω, P) un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

Définition 18.9

Le vecteur tangent unitaire en $P(u_0)$ défini par le paramétrage (Ω, P) est

$$\mathbf{t} = \frac{\overrightarrow{D_u P(u_0)}}{|\overrightarrow{D_u P(u_0)}|}$$

Proposition 18.10

Si P et Q définissent des paramétrages équivalents, alors les vecteurs tangents en $P(u_0)$ définis par ces deux paramétrages sont égaux ou opposés.

Proposition 18.11

Si on a un paramétrage naturel $(\Omega, s \mapsto P(s))$, alors on a
$\mathbf{t}(s) = \dot{P}(s) = \overrightarrow{D_s P(s)}$.

Courbure et normale principale

On cherche à analyser la variation de $\mathbf{t}$ en fonction d'un paramètre naturel s. Il ne peut pas varier en norme.

Proposition 18.12

Le vecteur $\dot{\mathbf{t}}$ est orthogonal à $\mathbf{t}$.

Définition 18.13

La courbure de l'arc régulier de courbe au point $P(s)$ est le nombre

$$\kappa(s) = |\,\dot{\mathbf{t}}\,(s)|.$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, alors le vecteur normal principal en $P(s)$ est

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}\,(s)}{|\,\dot{\mathbf{t}}\,(s)|}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La binormale

Ayant deux vecteurs normés et orthogonaux dans un espace euclidien de dimension 3, on calcule naturellement un troisième vecteur.

Définition 18.14

La binormale en le point P est le vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

Attention : dans certains ouvrages on définit $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$.

Proposition 18.15

Le triplet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ *définit une base orthonormée positive.*

Rem : si on change d'orientation pour la courbe, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$ changent de signe, mais pas $\mathbf{n}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le trièdre proprement dit

Nous avons défini trois vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ en chaque point $P(s)$. Ces vecteurs définissent, avec le point P trois plans.

Définition 18.16

Le trièdre de Frenet est formé par les trois plans suivants.

- Le plan *osculateur* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{n} \langle$;
- Le plan *normal* est $P + \rangle \mathbf{n}, \mathbf{b} \langle$;
- Le plan *rectifiant* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{b} \langle$.

Formules de Frenet dans un paramétrage naturel

Ces formules expriment les *dérivées* des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ dans la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

Définition 18.17

La torsion en un point $P(s)$ tel que $\kappa(s) \neq 0$ est définie par

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Théorème 18.18 (Formules de Frenet)

Les dérivées des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ *en un point* $P(s)$ *en lequel la courbure n'est pas nulle sont données par les formules suivantes.*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} & = & \kappa \mathbf{n}; \\ \dot{\mathbf{n}} & = & -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}; \\ \dot{\mathbf{b}} & = & -\tau \mathbf{n}. \end{cases}$$

Preuve : La première est la définition. Pour la deuxième on utilise les propriétés de la dérivation. Pour la dernière, on fait de même ou on dérive $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Trièdre de Frenet dans un paramétrage quelconque

On calcule les vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, κ et τ dans un paramétrage (Ω, P) quelconque.

Proposition 18.19

Soit Γ *un arc régulier de courbe de paramétrage* (Ω, P)*. On a alors*

a) $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$;

b) $\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}$;

et, si $\kappa \neq 0$

c) $\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}$;

d) $\mathbf{n} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \wedge \frac{P'}{|P'|}$;

e) $\tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^3}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La preuve

- L'abscisse curviligne, calculée à partir de $P(u_0)$ établit un changement de variable

$$s : \Omega \mapsto \Omega' : u \mapsto s(u) = \int_{u_0}^{u} \left| \overrightarrow{D_t P(t)} \right| \mathrm{d}t.$$

- On a donc $s : u \mapsto s(u)$. En inversant on écrit $u = u(s)$.
- Si $f : \Omega \to \mathcal{A}$(ou E), alors on définit

$$f : \Omega' \to E : s \mapsto f(s) = f(u(s)).$$

- On a alors

$$D_s f(s) = D_s f(u(s)) = D_u f(u)|_{u=u(s)} D_s(u(s)),$$

et

$$\dot{f}\,(s) = \frac{f'(u)}{|P'(u)|}|_{u=u(s)}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

- On a $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$ par définition.
- On dérive et on a

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^2} = \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}.$$

- On a $\dot{\mathbf{t}} = 0$ ssi κ est nul. Dans ce cas P' et P'' sont linéairement dépendants. Donc $P' \wedge P'' = 0$. Dans le cas contraire :

$$\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}} = \frac{P'}{|P'|} \wedge \left(\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}\right) = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}.$$

- En utilisant la première formule de Frenet, on trouve

$$\kappa\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3},$$

- On a donc

$$\kappa = |\kappa\mathbf{b}| = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3},$$

et

$$\mathbf{b} = \frac{\kappa\mathbf{b}}{\kappa} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}\frac{|P'|^3}{|P' \wedge P''|} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

- On a ensuite $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ puisque $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est une base orthonormée positive, ce qui donne la valeur annoncée pour $\mathbf{n}$.
- On a a $\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle$ et

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|} \left(\frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \right)'$$

$$= \frac{(P' \wedge P''')|P' \wedge P''| - |P' \wedge P''|'(P' \wedge P'')}{|P'||P' \wedge P''|^2}.$$

- Donc on a

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\langle P' \wedge P''', (P' \wedge P'') \wedge P' \rangle}{|P'|^2 |P' \wedge P''|^2},$$

que l'on calcule facilement.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.