Longueur d'arc, abscisse curviligne, trièdre et formules de Frenet

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 30 avril 2014

Orientation

- Un paramétrage définit un sens de parcours de l'A.R.C.
- Si (Ω, P) est un paramétrage, alors $P(u_1)$ est avant $P(u_2)$ si $u_1 < u_2$.
- Le monde des paramétrages équivalents d'un A.R.C. se divise en deux catégories (sous-ensembles) :

Définition 18.1

Un paramétrage (Ω, P) et un paramétrage équivalent $(\Omega', Q = P \circ \varphi)$ définissent la même orientation si $D_v\varphi(v) > 0$ pour tout $v \in \Omega'$. Dans le cas contraire, ils définissent une orientation différente.

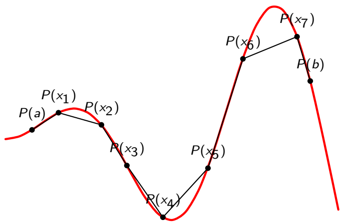
Exemple : $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$. Le changement de variable est défini par

$$\varphi(\alpha) = R\cos(\alpha)$$

et tel que $D_\alpha\varphi(\alpha)$ est négatif sur $]0, \pi[$.

Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$:



Définition 18.2

La longueur de l'arc de courbe déterminé par (Ω, P) entre $P(a)$ et $P(b)$ est le nombre

$$\sup_{D=[a=x_0,x_1,\ldots,x_n,b=x_{n+1}]} \sum_{i=1}^{n+1} |P(x_i) - P(x_{i-1})|$$

quand cette borne supérieure existe (auquel cas l'arc de courbe est dit rectifiable).

Calcul explicite et abscisse curviligne

Proposition 18.3

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et si $a < b$ sont dans Ω, alors la longueur d'arc entre $P(a)$ et $P(b)$ vaut

$$\int_a^b |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Ce résultat est admis, mais généralise le cas du graphe d'une fonction vu en analyse.

Définition 18.4

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et u_0 in Ω. L'ascisse curviligne $s(u)$ de $P(u)$ est la longueur d'arc entre $P(u_0)$ et $P(u)$ si $u_0 < u$ et l'opposé de cette longueur d'arc si $u < u_0$.

Propriétés fondamentales de l'abscisse curviligne

Proposition 18.5 (Calcul explicite)

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1, alors l'abscisse curviligne de $P(u)$ vaut

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Proposition 18.6 (Changement de variable)

L'abscisse curviligne est une fonction a dérivée strictement positive : on a

$$D_u s(u) = |\overrightarrow{D_u P}(u)| > 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

Elle définit donc un changement de variable $s : \Omega \to s(\Omega)$.
Le changement de variable inverse, noté $u = u(s)$ est tel que

$$D_s u(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{D_u P}(u)|}|_{u=u(s)}.$$

5

Paramétrages naturels

Définition 18.7

Un paramétrage (Ω, P) est naturel si on a $|\overrightarrow{D_u P(u)}| = 1$, pour tout $u \in \Omega$.

Proposition 18.8

Tout paramétrage (Ω, P) est équivalent à un paramétrage naturel.

Preuve : le paramétrage par l'abscisse curviligne, dans une orientation donnée est naturel.
Exemple : Le paramétrage

$$P(u) = (R\cos(u), R\sin(u)), \quad s \in]0, \pi[$$

n'est pas naturel mais le parmétrage

$$\gamma(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R})), \quad s \in]0, \pi R[,$$

est naturel.

6

Vecteur tangent unitaire

Soit (Ω, P) un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

Définition 18.9

Le vecteur tangent unitaire en $P(u_0)$ défini par le paramétrage (Ω, P) est

$$\mathbf{t} = \frac{\overrightarrow{D_u P(u_0)}}{|\overrightarrow{D_u P(u_0)}|}$$

Proposition 18.10

Si P et Q définissent des paramétrages équivalents, alors les vecteurs tangents en $P(u_0)$ définis par ces deux paramétrages sont égaux ou opposés.

Proposition 18.11

Si on a un paramétrage naturel $(\Omega, s \mapsto P(s))$, alors on a $\mathbf{t}(s) = \dot{P}(s) = \overrightarrow{D_s P(s)}$.

7

Courbure et normale principale

On cherche à analyser la variation de $\mathbf{t}$ en fonction d'un paramètre naturel s. Il ne peut pas varier en norme.

Proposition 18.12

Le vecteur $\dot{\mathbf{t}}$ est orthogonal à $\mathbf{t}$.

Définition 18.13

La courbure de l'arc régulier de courbe au point $P(s)$ est le nombre

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|.$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, alors le vecteur normal principal en $P(s)$ est

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{|\dot{\mathbf{t}}(s)|}.$$

8

La binormale

Ayant deux vecteurs normés et orthogonaux dans un espace euclidien de dimension 3, on calcule naturellement un troisième vecteur.

Définition 18.14

La binormale en le point P est le vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

Attention : dans certains ouvrages on définit $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$.

Proposition 18.15

Le triplet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ *définit une base orthonormée positive.*

Rem : si on change d'orientation pour la courbe, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$ changent de signe, mais pas $\mathbf{n}$.

Le trièdre proprement dit

Nous avons défini trois vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ en chaque point $P(s)$. Ces vecteurs définissent, avec le point P trois plans.

Définition 18.16

Le trièdre de Frenet est formé par les trois plans suivants.

- Le plan *osculateur* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{n} \langle$;
- Le plan *normal* est $P + \rangle \mathbf{n}, \mathbf{b} \langle$;
- Le plan *rectifiant* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{b} \langle$.

Formules de Frenet dans un paramétrage naturel

Ces formules expriment les *dérivées* des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ dans la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

Définition 18.17

La torsion en un point $P(s)$ tel que $\kappa(s) \neq 0$ est définie par

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}\,(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Théorème 18.18 (Formules de Frenet)

Les dérivées des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ *en un point* $P(s)$ *en lequel la courbure n'est pas nulle sont données par les formules suivantes.*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{t}} & = & \kappa \mathbf{n}; \\ \dot{\mathbf{n}} & = & -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}; \\ \dot{\mathbf{b}} & = & -\tau \mathbf{n}. \end{array} \right.$$

Preuve : La première est la définition. Pour la deuxième on utilise les propriétés de la dérivation. Pour la dernière, on fait de même ou on dérive $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Trièdre de Frenet dans un paramétrage quelconque

On calcule les vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, κ et τ dans un paramétrage (Ω, P) quelconque.

Proposition 18.19

Soit Γ *un arc régulier de courbe de paramétrage* (Ω, P). *On a alors*

a) $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$;

b) $\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}$;

et, si $\kappa \neq 0$

c) $\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}$;

d) $\mathbf{n} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \wedge \frac{P'}{|P'|}$;

e) $\tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^3}$.

La preuve

- L'abscisse curviligne, calculée à partir de $P(u_0)$ établit un changement de variable

$$s : \Omega \mapsto \Omega' : u \mapsto s(u) = \int_{u_0}^{u} \left|\overrightarrow{D_t P(t)}\right| \mathrm{d}t.$$

- On a donc $s : u \mapsto s(u)$. En inversant on écrit $u = u(s)$.
- Si $f : \Omega \to \mathcal{A}$(ou E), alors on définit

$$f : \Omega' \to E : s \mapsto f(s) = f(u(s)).$$

- On a alors

$$D_s f(s) = D_s f(u(s)) = D_u f(u)|_{u=u(s)} D_s(u(s)),$$

et

$$\dot{f}\,(s) = \frac{f'(u)}{|P'(u)|}|_{u=u(s)}.$$

- On a $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$ par définition.
- On dérive et on a

$$\dot{\mathbf{t}}= \frac{\mathbf{t}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^2} = \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}.$$

- On a $\dot{\mathbf{t}}= 0$ ssi κ est nul. Dans ce cas P' et P'' sont linéairement dépendants. Donc $P' \wedge P'' = 0$. Dans le cas contraire :

$$\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}}= \frac{P'}{|P'|} \wedge (\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}) = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}.$$

- En utilisant la première formule de Frenet, on trouve

$$\kappa\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3},$$

- On a donc

$$\kappa = |\kappa\mathbf{b}| = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3},$$

et

$$\mathbf{b} = \frac{\kappa\mathbf{b}}{\kappa} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}\frac{|P'|^3}{|P' \wedge P''|} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}.$$

- On a ensuite $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ puisque $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est une base orthonormée positive, ce qui donne la valeur annoncée pour $\mathbf{n}$.
- On a a $\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle$ et

$$\dot{\mathbf{b}}= \frac{\mathbf{b}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\left(\frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}\right)'$$

$$= \frac{(P' \wedge P''')|P' \wedge P''| - |P' \wedge P''|'(P' \wedge P'')}{|P'||P' \wedge P''|^2}.$$

- Donc on a

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\langle P' \wedge P''', (P' \wedge P'') \wedge P' \rangle}{|P'|^2|P' \wedge P''|^2},$$

que l'on calcule facilement.