Espaces affines euclidiens

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 17 avril 2013

Définitions :espaces affines, repères orthonormés

Définition 14.1

Un espace affine euclidien $\mathcal{A}$ (resp. orienté) est un espace affine modelé sur un espace vectoriel euclidien (resp. orienté).

Définition 14.2

Un repère orthonormé (resp. positif) est un repère $(O, (b_1, \ldots, b_n))$ tel que la base $(b_1, \ldots, b_n)$ soit orthonormée (resp. positive).

Proposition 14.3

Les coordonnées d'un point P dans un repère orthonormé $(O, (b_1, \ldots, b_n))$ sont données par

$$P : (\langle \overrightarrow{OP}, b_1 \rangle, \ldots, \langle \overrightarrow{OP}, b_n \rangle)^{\sim}.$$

Distance euclidienne

Définition 14.4

La distance euclidienne du point P au point Q de $\mathcal{A}$, notée $d(P, Q)$ est définie par

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Proposition 14.5

On a

1. $d(P, Q) = d(Q, P)$ *pour tous* $P, Q \in \mathcal{A}$;
2. $d(P, Q) \geqslant 0$ *pour tous* $P, Q \in \mathcal{A}$ *et* $d(P, P) = 0$;
3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geqslant d(P, R)$ *pour tous* $P, Q, R \in \mathcal{A}$;
4. $d(P, Q) = 0$ *si et seulement si* $P = Q$.

Théorème de Pythagore et consorts, distances

Proposition 14.6

Soit un triangle A, B, C. On a alors

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}| \cos \alpha$$

où α est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. En particulier, le triangle est rectangle en C si et seulement si on a

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2.$$

Proposition 14.7

Si les coordonnées de P et Q dans un repère orthonormé sont $(p_1, \ldots, p_n)^{\sim}$ et $(q_1, \ldots, q_n)^{\sim}$, alors la distance $d(P, Q)$ est donnée par

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2}.$$

Variétés affines orthogonales

Définition 14.8

Les variétés affines $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont orthogonales si leurs sous-espaces vectoriels directeurs $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{V}'}$ sont orthogonaux. On note $\mathcal{V}\perp\mathcal{V}'$.

- Les droites $d = A+\rangle u\langle$ et $d' = A'+\rangle v\langle$ sont orthogonales si, et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$.
- Si $u : (u_1, \dots, u_n)^\sim$ et $v : (v_1, \dots, v_n)^\sim$ dans *une base orthonormée*, alors on a $d\perp d'$ si, et seulement si $u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = 0$.
- En dimension 3, la droite $d = A+\rangle u\langle$ et le plan $\pi = B+\rangle v, w\langle$ sont orthogonaux si, et seulement si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = 0$.
- On a aussi $d\perp\pi$ si, et seulement si $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{\pi}^\perp$.
- Si dans un repère orthonormé $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$ (dans la base associée) alors on a $d\perp\pi$ si et seulement si (u_1, u_2, u_3) est multiple de (a_1, a_2, a_3).
- En dimension 3, deux plans ne sont jamais orthogonaux.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Projections orthogonales

Proposition 14.9

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine et $P \in \mathcal{A}$. Il existe un unique point $P' \in \mathcal{V}$ tel que $\rangle\overrightarrow{PP'}\langle\perp\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Preuve : décomposer $\overrightarrow{AP}$ selon $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{V}}^\perp$.

Définition 14.10

L'unique point P' défini par la proposition précédente est appelé projection orthogonale de P sur $\mathcal{V}$. Il est noté $p^\perp_{\mathcal{V}}(P)$ ou $p_{\mathcal{V}}(P)$.

Proposition 14.11

La projection orthogonale de P sur $\mathcal{V}$ est l'unique point P' d'intersection des variétés affines orthogonales $\mathcal{V}$ et $P + \mathcal{V}^\perp$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Projection sur des droites et hyperplans

Proposition 14.12

Soit $d = A+\rangle u\langle$ et soit $P \in \mathcal{A}$. La projection orthogonale de P sur d est le point

$$P' = A + \frac{\langle\overrightarrow{AP}, u\rangle}{|u|^2}u.$$

Proposition 14.13

Soit π l'hyperplan déterminé par le point A et le vecteur normal n, c'est à dire

$$\pi = \{Q \in \mathcal{A} : \langle\overrightarrow{AQ}, n\rangle = 0\}$$

et $P \in \mathcal{A}$. Alors on a

$$P' = P - \frac{\langle\overrightarrow{AP}, n\rangle}{|n|^2}n.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.