Distances de variétés affines, perpendiculaire commune

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 18 avril 2013

Distance de deux ensembles

Définition 15.1

La distance entre deux sous-ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ non vides de $\mathcal{A}$ est définie par

$$d(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \inf\{d(P,Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Rappels :

- La borne inférieure d'un ensemble (non vide) $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est un *minorant* de $\mathcal{E}$: on a

$$\inf \mathcal{E} \leqslant x \quad \forall x \in E.$$

- Il n'y a pas de "meilleur" minorant de $\mathcal{E}$:

$$\forall y > \inf \mathcal{E}, \exists x \in \mathcal{E} : x < y.$$

- La borne inférieure $\inf \mathcal{E}$ est *réalisée* si $\inf \mathcal{E} \in E$.
- Par exemple $\inf [1,4]$ est réalisée, $\inf]2,4]$ ne l'est pas.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un exemple graphique

Dans un repère orthonormé, considérons le graphe $\mathcal{P}$ de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

Un exemple graphique

Dans un repère orthonormé, considérons le graphe $\mathcal{P}$ de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

On a $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$, mais la distance n'est pas réalisée.

Un exemple graphique

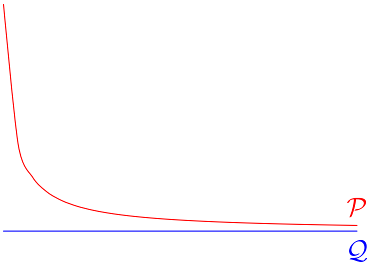
Dans un repère orthonormé, considérons le graphe $\mathcal{P}$ de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

On a $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$, mais la distance n'est pas réalisée.



Le cas des variétés affines

Proposition 15.2

La distance de deux variétés affines $\mathcal{V} = A + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{V}' = B + \overrightarrow{\mathcal{V}'}$ est toujours réalisée. Elle vaut $|u|$ si u est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur $(\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{V}'})^{\perp}$.

Preuve :

- On décompose $\overrightarrow{AB}$ en $v + v' + u$, $v \in \overrightarrow{\mathcal{V}}, v' \in \overrightarrow{\mathcal{V}'}, u \in (\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{V}'})^{\perp}$;
- Cette décomposition est unique si $\overrightarrow{\mathcal{V}} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}'} = \{0\}$;
- On pose $A_0 = A + v$, $B_0 = B + v'$;
- On a $u = \overrightarrow{A_0 B_0}$;
- On a $d(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = d(A_0, B_0)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particuliers, hyperplans

Corollaire 15.3

La distance d'un point P à une variété affine $\mathcal{V}$ est toujours réalisée : on a $d(P, \mathcal{V}) = d(P, P')$ où P' est la projection orthogonale de P sur $\mathcal{V}$.

Corollaire 15.4

Soient $\pi = A + \overrightarrow{\pi}$ un hyperplan, n une normale à cet hyperplan et $P \in \mathcal{A}$. On a alors

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, n \rangle|}{|n|}$$

En particulier, si dans un repère orthonormé π admet pour équation

$$\pi \equiv c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b$$

et si P a pour coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)^\sim$, alors on a

$$d(P, \pi) = \frac{|c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n - b|}{\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas des droites

Corollaire 15.5

Soit $d = A + \rangle u \langle$ *et soit* $P \in \mathcal{A}$*. Alors on a*

$$d(P, d) = |\overrightarrow{AP}| \sin \alpha,$$

où α *est l'angle non orienté entre* $\overrightarrow{AP}$ *et* u*.*
En particulier, pour un espace affine euclidien de dimension 3, on a

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge u|}{|u|},$$

où le produit vectoriel est calcule dans une orientation quelconque.

Droites et plans en dimension 2 et 3

Proposition 15.6

Si $\dim \mathcal{A} = 2$*, et si les droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont sécantes, alors* $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = 0$*. Si* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont parallèles, alors on a* $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = d(P, P')$ *pour tout* $P \in \mathcal{D}$*, si* P' *est la projection de* P *sur* $\mathcal{D}'$*.*

Proposition 15.7

Si $\dim \mathcal{A} = 3$*, et si* π *et* π' *sont sécants, alors* $d(\pi, \pi') = 0$*. Si* π *et* π' *sont parallèles, alors on a* $d(\pi, \pi') = d(P, P')$ *pour tout* $P \in \pi$*, si* P' *est la projection de* P *sur* π'*.*

Proposition 15.8

Si $\dim \mathcal{A} = 3$*, et si* $\mathcal{D}$ *et* π *sont sécants, alors* $d(\mathcal{D}, \pi) = 0$*. Si* $\mathcal{D}$ *et* π *sont parallèles, alors on a* $d(\mathcal{D}, \pi) = d(P, P')$ *pour tout* $P \in \mathcal{D}$*, si* P' *est la projection de* P *sur* π*.*

Droites en dimension 3

Le cas des droites sécantes ou parallèles est clair. Traitons celui des droites gauches.

Proposition 15.9

Les droites gauches $\mathcal{D} = A + \rangle u \langle$ et $\mathcal{D}' = B + \rangle u \langle$ on une distance égale à

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|[\overrightarrow{AB}, u, u']|}{|u \wedge u'|}.$$

Il existe un unique couple de points $P \in \mathcal{D}$, $P' \in \mathcal{D}'$ tels que

$$d(P, P') = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}').$$

Ces points déterminent la droite perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Angles de droites et hyperplans

Définition 15.10

L'angle des droites $\mathcal{D} = A + \rangle u \langle$ et $\mathcal{D}' = A' + \rangle u' \langle$ est l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ déterminé par

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u, u' \rangle|}{|u||u'|}.$$

Définition 15.11

L'angle d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un hyperplan π vaut $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ où α est l'angle entre $\mathcal{D}$ et une normale quelconque $\mathcal{N}$ à π. On a donc

$$\sin \beta = \frac{|\langle u, n \rangle|}{|u||n|},$$

où u est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et n une normale à π.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Angle de deux hyperplans

Définition 15.12

L'angle de deux hyperplans π et π' est l'angle α entre deux de leurs droites normales quelconques. On a donc

$$\cos\alpha = \frac{|\langle n, n'\rangle|}{|n||n'|}$$

où n et n' sont des normales à π et π' respectivement.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.