# Courbes I : définitions

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 2 mai 2013

# Quelques exemples

On se donne une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine. Si on fixe un repère (orthonormé), on a alors $n$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Voici quelques exemples bien connus :

1. $\gamma_1 : ]0, \pi[ \to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (R\cos(\alpha), R\sin(\alpha))$ ;
2. $\gamma_2 : ]-R, R[ \to \mathcal{A} : x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$ ;
3. $\gamma_3 : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathcal{A} : \theta \mapsto (R\sin(\theta), R\cos(\theta))$.

Ce sont trois paramétrages du même demi-cercle (si $\mathcal{A}$ est affine euclidien muni d'un repère orthonormé).

On peut imaginer n'importe quoi :

1. $\gamma_4 : ]0, 2\pi[ \to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (1 + \cos(\alpha))(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ;
2. $\gamma_5 : ]0, 4\pi[ \to \mathcal{A} : \theta \mapsto (\sin(3\theta), \sin(4\theta))$.

La première est une cardioïde, la seconde une courbe de Lissajous.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Fonctions à valeurs dans un espace affine, ou vectoriel

## Définition 16.1

Une application $P$ définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine $\mathcal{A}$ est continue (resp. dérivable, de classe $C_p$) si il existe un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$ tel que les coordonnées de $P$ soient des fonctions continues (resp. dérivables, différentiables, de classe $C_p$).

## Proposition 16.2

*Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application. Si les coordonnées de $P$ dans un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$, sont continues (resp. dérivables, de classe $C_p$), alors les coordonnées de $P$ dans tout repère le sont également.*



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Dérivées

## Définition 16.3

Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application dérivable en un point $u_0 \in \Omega$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère dans lequel

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}.$$

Alors la dérivée de $P$ en $u_0$ est le vecteur donné dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) : \begin{pmatrix} D_u x_1(u_0) \\ \vdots \\ D_u x_n(u_0) \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

## Proposition 16.4

*La définition est indépendante du choix du repère dans lequel on calcule la dérivée : $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$ se transforme comme un vecteur.*

# Preuve

Si dans le repère $\mathcal{R}$ l'application $P : u \mapsto P(u)$ s'exprime en coordonnées par

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}, \tag{16.2}$$

alors dans un autre repère $\mathcal{R}'$, on a

$$P(u) : \begin{pmatrix} y_1(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions $y_j$ sont obtenues en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ par la formule de changement de repère :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_{11}x_1(u) + \cdots + a_{1n}x_n(u) + c_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n(u) & = & a_{n1}x_1(u) + \cdots + a_{nn}x_n(u) + c_n, \end{array} \right. \tag{16.3}$$

où les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Remarques

1. On a des définitions analogues pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel. On considère les composantes dans une base donnée ;
2. Si on devait considérer une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ avec $k > 1$, la même définition permettrait de définir les dérivées partielles ;
3. On aurait pu définir la dérivée par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) = \lim_{h \to 0} \frac{P(u_0 + h) - P(u_0)}{h}.$$

   On aurait obtenu le même résultat, mais il aurait fallu définir la notion de limite pour une telle fonction, ce qui reportait le problème.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Quelques résultats sur la dérivation I

## Proposition 16.5

*Si $f, g, h$ sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $E$ (e.v. euclidien), dérivables alors*

$$D_u(\langle f(u), g(u)\rangle) = \langle D_u f(u), g(u)\rangle + \langle f(u), D_u g(u)\rangle, \quad \forall u \in \Omega.$$

*En particulier, si $|f(u)| = C \quad \forall u \in \Omega$, alors $\langle D_u f(u), f(u)\rangle = 0$.*
*Si $E$ est euclidien orienté de dimension 3, alors*

$$D_u(f(u) \wedge g(u)) = D_u f(u) \wedge g(u) + f(u) \wedge D_u g(u),$$

*et*

$$D_u[f(u), g(u), h(u)] = [D_u f(u), g(u), h(u)] + [f(u), D_u g(u), h(u)] + [f(u), g(u), D_u h(u)].$$

# Quelques résultats sur la dérivation II

## Proposition 16.6

*Si $f, g$ sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $E$ (e.v. euclidien), dérivables et telles que*

$$\langle f(u), g(u) \rangle = C \quad \forall u \in \Omega,$$

*alors on a*

$$\langle D_u f(u), g(u) \rangle = -\langle f(u), D_u g(u) \rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

*Si $P$ est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ ou $E$, dérivable, et si $\varphi : \Omega' \to \Omega$ est dérivable, alors $P \circ \varphi$ est dérivable et on a*

$$\overrightarrow{D_{u'} P \circ \varphi}(u'_0) = \overrightarrow{D_u P}(u)|_{u=\varphi(u'_0)} D_{u'} \varphi(u'_0).$$



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Paramétrages et arcs réguliers

## Définition 16.7

Un paramétrage de classe $C_p$ d'un arc régulier de courbe est un couple $(\Omega, P)$ où

- $\Omega$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ;
- $P : \Omega \to \mathcal{A}$ est une application de classe $C_k$ ;
- On a $\overrightarrow{D_u P}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

Un *arc régulier de courbe* est l'image d'un paramétrage.

Exemples : $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\gamma_3$ définissent des paramétrages d'arcs réguliers, mais pas $\gamma_4$, car par exemple

$$D_\alpha \gamma_1(\alpha) = (-R\sin(\alpha), R\cos(\alpha)) \neq (0,0), \text{ pour tout } \alpha \in ]0, \pi[,$$

mais

$$D_\alpha \gamma_4(\alpha) = -\sin(\alpha)(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + (1+\cos(\alpha))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

s'annule en $\alpha = \pi$.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Paramétrages équivalents : exemples

- Les paramétrages $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\gamma_3$ définissent le même arc régulier de courbe.
- On a juste changé de paramètre :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$ ;
  2. $\gamma_2(x) = \gamma_1(\arccos(\frac{x}{R}))$ ;

  On a une correspondance de paramètres :

$$x = R\cos(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \arccos(\frac{x}{R}) = \varphi^{-1}(\alpha).$$

  De même :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_3(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_1(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ;

  et
  1. $\gamma_2(x) = \gamma_3(\arcsin(\frac{x}{R}))$ ;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_2(R\sin(\theta))$.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Définition 16.8

Deux paramétrages de classe $C_p$ $(\Omega, P)$ et $(\Omega', Q)$ d'un arc régulier de courbe sont équivalents s'il existe un changement de variable de classe $C_p$ $\varphi : \Omega' \to \Omega$ tel que

$$Q(u') = P \circ \varphi(u') \quad \forall u' \in \Omega.$$

Remarques :

1. la condition précédente se lit $Q = P \circ \varphi$, mais aussi $P = Q \circ \varphi^{-1}$ ;
2. On écrit parfois $P(u')$ au lieu de $Q(u')$ ;
3. On voit aussi parfois la notation suivante :

$$P = P(u), \quad u = u(u') \quad \text{donc} \quad P = P(u') = P(u(u')).$$

4. Pour associer un objet géométrique à l'arc régulier de courbe défini par une classe de paramétrage équivalents, il faut vérifier que cet objet ne dépend pas du paramétrage choisi pour le définir.

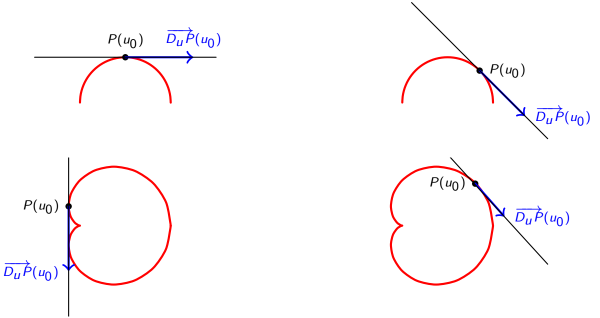


P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Tangente en un point d'un arc régulier

## Définition 16.9

La tangente en un point $P(u_0)$ d'un A.R.C $\Gamma$ est la droite passant par $P(u_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$.




## Proposition 16.10

*Cette définition est indépedante du paramétrage.*



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Orientation

- Un paramétrage définit un sens de parcours de l'A.R.C.
- Si $(\Omega, P)$ est un paramétrage, alors $P(u_1)$ est avant $P(u_2)$ si $u_1 < u_2$.
- Le monde des paramétrages équivalents d'un A.R.C. se divise en deux catégories (sous-ensembles) :

## Définition 16.11

Un paramétrage $(\Omega, P)$ et un paramétrage équivalent $(\Omega', Q = P \circ \varphi)$ définissent la même orientation si $D_v\varphi(v) > 0$ pour tout $v \in \Omega'$. Dans le cas contraire, ils définissent une orientation différente.

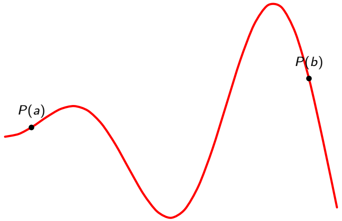
Exemple : $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$. Le changement de variable est défini par

$$\varphi(\alpha) = R\cos(\alpha)$$

et tel que $D_\alpha\varphi(\alpha)$ est négatif sur $]0, \pi[$.

# Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$ :

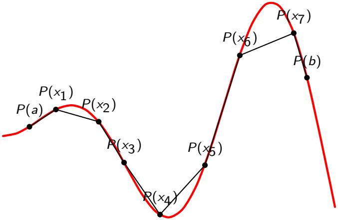





P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$ :

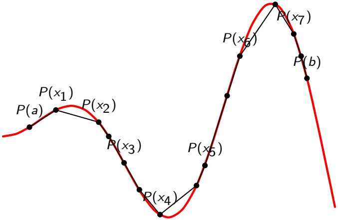





P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$ :

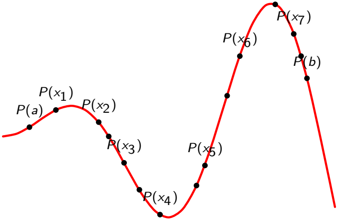





P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$ :




## Définition 16.12

La longueur de l'arc de courbe déterminé par $(\Omega, P)$ entre $P(a)$ et $P(b)$ est le nombre

$$\sup_{D=[a=x_0,x_1,\ldots,x_n,b=x_{n+1}]} \sum_{i=1}^{n+1} |P(x_i) - P(x_{i-1})|$$

quand cette borne supérieure existe (auquel cas l'arc de courbe est dit rectifiable).



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Calcul explicite et abscisse curviligne

## Proposition 16.13

*Si $(\Omega, P)$ est un paramétrage de classe $C_1$ et si $a < b$ sont dans $\Omega$, alors la longueur d'arc entre $P(a)$ et $P(b)$ vaut*

$$\int_a^b |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Ce résultat est admis, mais généralise le cas du graphe d'une fonction vu en analyse.

## Définition 16.14

Si $(\Omega, P)$ est un paramétrage de classe $C_1$ et $u_0$ in $\Omega$. L'ascisse curviligne $s(u)$ de $P(u)$ est la longueur d'arc entre $P(u_0)$ et $P(u)$ si $u_0 < u$ et l'opposé de cette longueur d'arc si $u < u_0$.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Propriétés fondamentales de l'abscisse curviligne

## Proposition 16.15 (Calcul explicite)

*Si $(\Omega, P)$ est un paramétrage de classe $C_1$, alors l'abscisse curviligne de $P(u)$ vaut*

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

## Proposition 16.16 (Changement de variable)

*L'abscisse curviligne est une fonction a dérivée strictement positive : on a*

$$D_u s(u) = |\overrightarrow{D_u P}(u)| > 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

*Elle définit donc un changement de variable $s : \Omega \to s(\Omega)$.*
*Le changement de variable inverse, noté $u = u(s)$ est tel que*

$$D_s u(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{D_u P}(u)|}\Big|_{u=u(s)}.$$



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

# Paramétrages naturels

## Définition 16.17

Un paramétrage $(\Omega, P)$ est naturel si on a $|\overrightarrow{D_u P(u)}| = 1$, pour tout $u \in \Omega$.

## Proposition 16.18

*Tout paramétrage $(\Omega, P)$ est équivalent à un paramétrage naturel.*

Preuve : le paramétrage par l'abscisse curviligne, dans une orientation donnée est naturel.
Exemple : Le paramétrage

$$P(u) = (R\cos(u), R\sin(u)), \quad s \in ]0, \pi[$$

n'est pas naturel mais le parmétrage

$$\gamma(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R})), \quad s \in ]0, \pi R[,$$

est naturel.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.