Courbes I : définitions

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 2 mai 2013

Quelques exemples

On se donne une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine. Si on fixe un repère (orthonormé), on a alors n fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Voici quelques exemples bien connus :

1. $\gamma_1 :]0, \pi[\to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (R\cos(\alpha), R\sin(\alpha))$;
2. $\gamma_2 :]-R, R[\to \mathcal{A} : x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$;
3. $\gamma_3 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathcal{A} : \theta \mapsto (R\sin(\theta), R\cos(\theta))$.

Ce sont trois paramétrages du même demi-cercle (si $\mathcal{A}$ est affine euclidien muni d'un repère orthonormé).

On peut imaginer n'importe quoi :

1. $\gamma_4 :]0, 2\pi[\to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (1 + \cos(\alpha))(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$;
2. $\gamma_5 :]0, 4\pi[\to \mathcal{A} : \theta \mapsto (\sin(3\theta), \sin(4\theta))$.

La première est une cardioïde, la seconde une courbe de Lissajous.

Fonctions à valeurs dans un espace affine, ou vectoriel

Définition 16.1

Une application P définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine $\mathcal{A}$ est continue (resp. dérivable, de classe C_p) si il existe un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$ tel que les coordonnées de P soient des fonctions continues (resp. dérivables, différentiables, de classe C_p).

Proposition 16.2

Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application. Si les coordonnées de P dans un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$, sont continues (resp. dérivables, de classe C_p), alors les coordonnées de P dans tout repère le sont également.

Dérivées

Définition 16.3

Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application dérivable en un point $u_0 \in \Omega$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère dans lequel

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}.$$

Alors la dérivée de P en u_0 est le vecteur donné dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) : \begin{pmatrix} D_u x_1(u_0) \\ \vdots \\ D_u x_n(u_0) \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

Proposition 16.4

La définition est indépendante du choix du repère dans lequel on calcule la dérivée : $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$ se transforme comme un vecteur.

Preuve

Si dans le repère $\mathcal{R}$ l'application $P : u \mapsto P(u)$ s'exprime en coordonnées par

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}, \tag{16.2}$$

alors dans un autre repère $\mathcal{R}'$, on a

$$P(u) : \begin{pmatrix} y_1(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions y_j sont obtenues en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ par la formule de changement de repère :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_{11}x_1(u) + \cdots + a_{1n}x_n(u) + c_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n(u) & = & a_{n1}x_1(u) + \cdots + a_{nn}x_n(u) + c_n, \end{array} \right. \tag{16.3}$$

où les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes.

Remarques

1. On a des définitions analogues pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel. On considère les composantes dans une base donnée ;
2. Si on devait considérer une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ avec $k > 1$, la même définition permettrait de définir les dérivées partielles ;
3. On aurait pu définir la dérivée par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) = \lim_{h \to 0} \frac{P(u_0 + h) - P(u_0)}{h}.$$

On aurait obtenu le même résultat, mais il aurait fallu définir la notion de limite pour une telle fonction, ce qui reportait le problème.

Quelques résultats sur la dérivation I

Proposition 16.5

Si f, g, h sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables alors

$$D_u(\langle f(u), g(u)\rangle) = \langle D_u f(u), g(u)\rangle + \langle f(u), D_u g(u)\rangle, \quad \forall u \in \Omega.$$

En particulier, si $|f(u)| = C \quad \forall u \in \Omega$, alors $\langle D_u f(u), f(u)\rangle = 0$.
Si E est euclidien orienté de dimension 3, alors

$$D_u(f(u) \wedge g(u)) = D_u f(u) \wedge g(u) + f(u) \wedge D_u g(u),$$

et

$$D_u[f(u), g(u), h(u)] = [D_u f(u), g(u), h(u)] + [f(u), D_u g(u), h(u)] + [f(u), g(u), D_u h(u)].$$

Quelques résultats sur la dérivation II

Proposition 16.6

Si f, g sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables et telles que

$$\langle f(u), g(u)\rangle = C \quad \forall u \in \Omega,$$

alors on a

$$\langle D_u f(u), g(u)\rangle = -\langle f(u), D_u g(u)\rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

Si P est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ ou E, dérivable, et si $\varphi : \Omega' \to \Omega$ est dérivable, alors $P \circ \varphi$ est dérivable et on a

$$\overrightarrow{D_{u'} P \circ \varphi}(u'_0) = \overrightarrow{D_u P}(u)|_{u=\varphi(u'_0)} D_{u'}\varphi(u'_0).$$

Paramétrages et arcs réguliers

Définition 16.7

Un paramétrage de classe C_p d'un arc régulier de courbe est un couple (Ω, P) où

- Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
- $P : \Omega \to \mathcal{A}$ est une application de classe C_k ;
- On a $\overrightarrow{D_u P}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

Un *arc régulier de courbe* est l'image d'un paramétrage.

Exemples : γ_1, γ_2 et γ_3 définissent des paramétrages d'arcs réguliers, mais pas γ_4, car par exemple

$$D_\alpha \gamma_1(\alpha) = (-R\sin(\alpha), R\cos(\alpha)) \neq (0,0), \text{ pour tout } \alpha \in]0, \pi[,$$

mais

$$D_\alpha \gamma_4(\alpha) = -\sin(\alpha)(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + (1+\cos(\alpha))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

s'annule en $\alpha = \pi$.

Paramétrages équivalents : exemples

- Les paramétrages γ_1, γ_2 et γ_3 définissent le même arc régulier de courbe.
- On a juste changé de paramètre :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$;
  2. $\gamma_2(x) = \gamma_1(\arccos(\frac{x}{R}))$;

  On a une correspondance de paramètres :

$$x = R\cos(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \arccos(\frac{x}{R}) = \varphi^{-1}(\alpha).$$

  De même :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_3(\frac{\pi}{2} - \alpha)$;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_1(\frac{\pi}{2} - \theta)$;

  et
  1. $\gamma_2(x) = \gamma_3(\arcsin(\frac{x}{R}))$;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_2(R\sin(\theta))$.

Définition 16.8

Deux paramétrages de classe C_p (Ω, P) et (Ω', Q) d'un arc régulier de courbe sont équivalents s'il existe un changement de variable de classe C_p $\varphi : \Omega' \to \Omega$ tel que

$$Q(u') = P \circ \varphi(u') \quad \forall u' \in \Omega.$$

Remarques :

1. la condition précédente se lit $Q = P \circ \varphi$, mais aussi $P = Q \circ \varphi^{-1}$;
2. On écrit parfois $P(u')$ au lieu de $Q(u')$;
3. On voit aussi parfois la notation suivante :

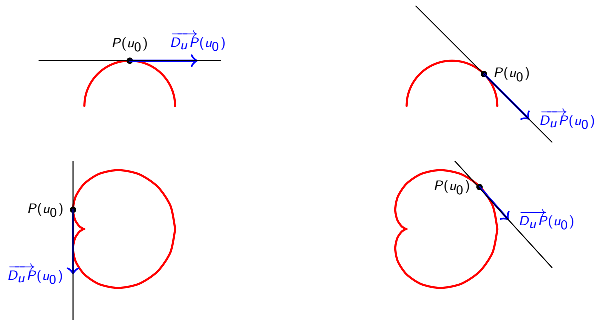
$$P = P(u), \quad u = u(u') \quad \text{donc} \quad P = P(u') = P(u(u')).$$

4. Pour associer un objet géométrique à l'arc régulier de courbe défini par une classe de paramétrage équivalents, il faut vérifier que cet objet ne dépend pas du paramétrage choisi pour le définir.

Tangente en un point d'un arc régulier

Définition 16.9

La tangente en un point $P(u_0)$ d'un A.R.C Γ est la droite passant par $P(u_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$.



Proposition 16.10

Cette définition est indépedante du paramétrage.

Orientation

- Un paramétrage définit un sens de parcours de l'A.R.C.
- Si (Ω, P) est un paramétrage, alors $P(u_1)$ est avant $P(u_2)$ si $u_1 < u_2$.
- Le monde des paramétrages équivalents d'un A.R.C. se divise en deux catégories (sous-ensembles) :

Définition 16.11

Un paramétrage (Ω, P) et un paramétrage équivalent $(\Omega', Q = P \circ \varphi)$ définissent la même orientation si $D_v\varphi(v) > 0$ pour tout $v \in \Omega'$. Dans le cas contraire, ils définissent une orientation différente.

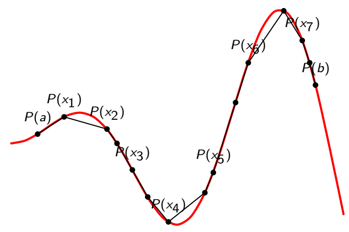
Exemple : $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$. Le changement de variable est défini par

$$\varphi(\alpha) = R\cos(\alpha)$$

et tel que $D_\alpha\varphi(\alpha)$ est négatif sur $]0, \pi[$.

Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$:



Définition 16.12

La longueur de l'arc de courbe déterminé par (Ω, P) entre $P(a)$ et $P(b)$ est le nombre

$$\sup_{D=[a=x_0, x_1, \ldots, x_n, b=x_{n+1}]} \sum_{i=1}^{n+1} |P(x_i) - P(x_{i-1})|$$

quand cette borne supérieure existe (auquel cas l'arc de courbe est dit rectifiable).

Calcul explicite et abscisse curviligne

Proposition 16.13

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et si $a < b$ sont dans Ω, alors la longueur d'arc entre $P(a)$ et $P(b)$ vaut

$$\int_a^b |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Ce résultat est admis, mais généralise le cas du graphe d'une fonction vu en analyse.

Définition 16.14

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et u_0 in Ω. L'ascisse curviligne $s(u)$ de $P(u)$ est la longueur d'arc entre $P(u_0)$ et $P(u)$ si $u_0 < u$ et l'opposé de cette longueur d'arc si $u < u_0$.

Propriétés fondamentales de l'abscisse curviligne

Proposition 16.15 (Calcul explicite)

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1, alors l'abscisse curviligne de $P(u)$ vaut

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Proposition 16.16 (Changement de variable)

L'abscisse curviligne est une fonction a dérivée strictement positive : on a

$$D_u s(u) = |\overrightarrow{D_u P}(u)| > 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

Elle définit donc un changement de variable $s : \Omega \to s(\Omega)$.
Le changement de variable inverse, noté $u = u(s)$ est tel que

$$D_s u(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{D_u P}(u)|}|_{u=u(s)}.$$

Paramétrages naturels

Définition 16.17

Un paramétrage (Ω, P) est naturel si on a $|\overrightarrow{D_u P(u)}| = 1$, pour tout $u \in \Omega$.

Proposition 16.18

Tout paramétrage (Ω, P) est équivalent à un paramétrage naturel.

Preuve : le paramétrage par l'abscisse curviligne, dans une orientation donnée est naturel.
Exemple : Le paramétrage

$$P(u) = (R\cos(u), R\sin(u)), \quad s \in]0, \pi[$$

n'est pas naturel mais le parmétrage

$$\gamma(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R})), \quad s \in]0, \pi R[,$$

est naturel.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.