



## Courbes II : trièdre de Frenet

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 2 mai 2013

## Vecteur tangent unitaire

Soit  $(\Omega, P)$  un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

### Définition 17.1

Le vecteur tangent unitaire en  $P(u_0)$  défini par le paramétrage  $(\Omega, P)$  est

$$\mathbf{t} = \frac{\overrightarrow{D_u P(u_0)}}{|\overrightarrow{D_u P(u_0)}|}$$

### Proposition 17.2

*Si  $P$  et  $Q$  définissent des paramétrages équivalents, alors les vecteurs tangents en  $P(u_0)$  définis par ces deux paramétrages sont égaux ou opposés.*

### Proposition 17.3

*Si on a un paramétrage naturel  $(\Omega, s \mapsto P(s))$ , alors on a*

$$\mathbf{t}(s) = \dot{P}(s) = \overrightarrow{D_s P(s)}.$$

## Courbure et normale principale

On cherche à analyser la variation de  $\mathbf{t}$  en fonction d'un paramètre naturel  $s$ . Il ne peut pas varier en norme.

### Proposition 17.4

Le vecteur  $\dot{\mathbf{t}}$  est orthogonal à  $\mathbf{t}$ .

### Définition 17.5

La courbure de l'arc régulier de courbe au point  $P(s)$  est le nombre

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|.$$

Si  $\kappa(s) \neq 0$ , alors le vecteur **normal principal** en  $P(s)$  est

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{|\dot{\mathbf{t}}(s)|}.$$

## La binormale

Ayant deux vecteurs normés et orthogonaux dans un espace euclidien de dimension 3, on calcule naturellement un troisième vecteur.

### Définition 17.6

La binormale en le point  $P$  est le vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

Attention : dans certains ouvrages on définit  $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$ .

### Proposition 17.7

*Le triplet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  définit une base orthonormée positive.*

Rem : si on change d'orientation pour la courbe,  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{b}$  changent de signe, mais pas  $\mathbf{n}$ .

## Le trièdre proprement dit

Nous avons défini trois vecteurs  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  en chaque point  $P(s)$ . Ces vecteurs définissent, avec le point  $P$  trois plans.

### Définition 17.8

Le trièdre de Frenet est formé par les trois plans suivants.

- Le plan *osculateur* est  $P+\rangle\mathbf{t}, \mathbf{n}\langle$  ;
- Le plan *normal* est  $P+\rangle\mathbf{n}, \mathbf{b}\langle$  ;
- Le plan *rectifiant* est  $P+\rangle\mathbf{t}, \mathbf{b}\langle$ .

# Formules de Frenet dans un paramétrage naturel

Ces formules expriment les *dérivées* des vecteurs  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{b}$  dans la base  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ .

## Définition 17.9

La torsion en un point  $P(s)$  tel que  $\kappa(s) \neq 0$  est définie par

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

## Théorème 17.10 (Formules de Frenet)

*Les dérivées des vecteurs  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  en un point  $P(s)$  en lequel la courbure n'est pas nulle sont données par les formules suivantes.*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa \mathbf{n}; \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}; \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau \mathbf{n}. \end{cases}$$

Preuve : La première est la définition. Pour la deuxième on utilise les propriétés de la dérivation. Pour la dernière, on fait de même ou on dérive  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ .

# Trièdre de Frenet dans un paramétrage quelconque

On calcule les vecteurs  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\kappa$  et  $\tau$  dans un paramétrage  $(\Omega, P)$  quelconque.

## Proposition 17.11

Soit  $\Gamma$  un arc régulier de courbe de paramétrage  $(\Omega, P)$ . On a alors

$$\text{a) } \mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|};$$

$$\text{b) } \kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3};$$

et, si  $\kappa \neq 0$

$$\text{c) } \mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|};$$

$$\text{d) } \mathbf{n} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \wedge \frac{P'}{|P'|};$$

$$\text{e) } \tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^3}.$$

## La preuve

- L'abscisse curviligne, calculée à partir de  $P(u_0)$  établit un changement de variable

$$s : \Omega \mapsto \Omega' : u \mapsto s(u) = \int_{u_0}^u \left| \overrightarrow{D_t P(t)} \right| dt.$$

- On a donc  $s : u \mapsto s(u)$ . En inversant on écrit  $u = u(s)$ .
- Si  $f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  (ou  $E$ ), alors on définit

$$f : \Omega' \rightarrow E : s \mapsto f(s) = f(u(s)).$$

- On a alors

$$D_s f(s) = D_s f(u(s)) = D_u f(u)|_{u=u(s)} D_s(u(s)),$$

et

$$\dot{f}(s) = \frac{f'(u)}{|P'(u)|} \Big|_{u=u(s)}.$$



- On a  $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$  par définition.
- On dérive et on a

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|} \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^2} = \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}.$$

- On a  $\dot{\mathbf{t}} = 0$  ssi  $\kappa$  est nul. Dans ce cas  $P'$  et  $P''$  sont linéairement dépendants. Donc  $P' \wedge P'' = 0$ . Dans le cas contraire :

$$\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}} = \frac{P'}{|P'|} \wedge \left( \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3} \right) = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}.$$

- En utilisant la première formule de Frenet, on trouve

$$\kappa \mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3},$$

- On a donc

$$\kappa = |\kappa \mathbf{b}| = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3},$$

et

$$\mathbf{b} = \frac{\kappa \mathbf{b}}{\kappa} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3} \frac{|P'|^3}{|P' \wedge P''|} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}.$$

- On a ensuite  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$  puisque  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  est une base orthonormée positive, ce qui donne la valeur annoncée pour  $\mathbf{n}$ .
- On a  $\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle$  et

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}} &= \frac{\mathbf{b}'}{|\mathbf{P}'|} = \frac{1}{|\mathbf{P}'|} \left( \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \right)' \\ &= \frac{(P' \wedge P''')|P' \wedge P''| - |P' \wedge P''|(P' \wedge P'')}{|\mathbf{P}'||P' \wedge P''|^2}. \end{aligned}$$

- Donc on a

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\langle P' \wedge P''', (P' \wedge P'') \wedge P' \rangle}{|\mathbf{P}'|^2 |P' \wedge P''|^2},$$

que l'on calcule facilement.