Courbes II : trièdre de Frenet

Université de Liège

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 2 mai 2013

Vecteur tangent unitaire

Soit (Ω, P) un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

Définition 17.1

Le vecteur tangent unitaire en $P(u_0)$ défini par le paramétrage (Ω, P) est

$$\mathbf{t} = \frac{\overrightarrow{D_u P(u_0)}}{|\overrightarrow{D_u P(u_0)}|}$$

Proposition 17.2

Si P et Q définissent des paramétrages équivalents, alors les vecteurs tangents en $P(u_0)$ définis par ces deux paramétrages sont égaux ou opposés.

Proposition 17.3

Si on a un paramétrage naturel $(\Omega, s \mapsto P(s))$, alors on a $\mathbf{t}(s) = \dot{P}(s) = \overrightarrow{D_s P(s)}$.

Courbure et normale principale

On cherche à analyser la variation de $\mathbf{t}$ en fonction d'un paramètre naturel s. Il ne peut pas varier en norme.

Proposition 17.4

Le vecteur $\dot{\mathbf{t}}$ est orthogonal à $\mathbf{t}$.

Définition 17.5

La courbure de l'arc régulier de courbe au point $P(s)$ est le nombre

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|.$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, alors le vecteur normal principal en $P(s)$ est

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{|\dot{\mathbf{t}}(s)|}.$$

La binormale

Ayant deux vecteurs normés et orthogonaux dans un espace euclidien de dimension 3, on calcule naturellement un troisième vecteur.

Définition 17.6

La binormale en le point P est le vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

Attention : dans certains ouvrages on définit $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$.

Proposition 17.7

Le triplet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ définit une base orthonormée positive.

Rem : si on change d'orientation pour la courbe, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$ changent de signe, mais pas $\mathbf{n}$.

Le trièdre proprement dit

Nous avons défini trois vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ en chaque point $P(s)$. Ces vecteurs définissent, avec le point P trois plans.

Définition 17.8

Le trièdre de Frenet est formé par les trois plans suivants.

- Le plan *osculateur* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{n} \langle$;
- Le plan *normal* est $P + \rangle \mathbf{n}, \mathbf{b} \langle$;
- Le plan *rectifiant* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{b} \langle$.

Formules de Frenet dans un paramétrage naturel

Ces formules expriment les *dérivées* des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ dans la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

Définition 17.9

La torsion en un point $P(s)$ tel que $\kappa(s) \neq 0$ est définie par

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Théorème 17.10 (Formules de Frenet)

Les dérivées des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ *en un point* $P(s)$ *en lequel la courbure n'est pas nulle sont données par les formules suivantes.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{t}} & = & \kappa \mathbf{n}; \\ \dot{\mathbf{n}} & = & -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}; \\ \dot{\mathbf{b}} & = & -\tau \mathbf{n}. \end{array} \right.$$

Preuve : La première est la définition. Pour la deuxième on utilise les propriétés de la dérivation. Pour la dernière, on fait de même ou on dérive $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Trièdre de Frenet dans un paramétrage quelconque

On calcule les vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, κ et τ dans un paramétrage (Ω, P) quelconque.

Proposition 17.11

Soit Γ *un arc régulier de courbe de paramétrage* (Ω, P). *On a alors*

a) $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$;

b) $\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}$;

et, si $\kappa \neq 0$

c) $\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}$;

d) $\mathbf{n} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \wedge \frac{P'}{|P'|}$;

e) $\tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^3}$.

La preuve

- L'abscisse curviligne, calculée à partir de $P(u_0)$ établit un changement de variable

$$s : \Omega \mapsto \Omega' : u \mapsto s(u) = \int_{u_0}^{u} \left| \overrightarrow{D_t P(t)} \right| \mathrm{d}t.$$

- On a donc $s : u \mapsto s(u)$. En inversant on écrit $u = u(s)$.
- Si $f : \Omega \to \mathcal{A}$(ou E), alors on définit

$$f : \Omega' \to E : s \mapsto f(s) = f(u(s)).$$

- On a alors

$$D_s f(s) = D_s f(u(s)) = D_u f(u)|_{u=u(s)} D_s(u(s)),$$

et

$$\dot{f}(s) = \frac{f'(u)}{|P'(u)|}|_{u=u(s)}.$$

- On a $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$ par définition.
- On dérive et on a

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^2} = \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}.$$

- On a $\dot{\mathbf{t}} = 0$ ssi κ est nul. Dasn ce cas P' et P'' sont linéairement dépendants. Donc $P' \wedge P'' = 0$. Dans le cas contraire :

$$\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}} = \frac{P'}{|P'|} \wedge \left(\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}\right) = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}.$$

- En utilisant la première formule de Frenet, on trouve

$$\kappa \mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3},$$

- On a donc

$$\kappa = |\kappa \mathbf{b}| = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3},$$

et

$$\mathbf{b} = \frac{\kappa \mathbf{b}}{\kappa} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}\frac{|P'|^3}{|P' \wedge P''|} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}.$$

- On a ensuite $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ puisque $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est une base orthonormée positive, ce qui donne la valeur annoncée pour $\mathbf{n}$.
- On a a $\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle$ et

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\left(\frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}\right)'$$

$$= \frac{(P' \wedge P''')|P' \wedge P''| - |P' \wedge P''|'(P' \wedge P'')}{|P'||P' \wedge P''|^2}.$$

- Donc on a

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\langle P' \wedge P''', (P' \wedge P'') \wedge P' \rangle}{|P'|^2|P' \wedge P''|^2},$$

que l'on calcule facilement.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.