



Espaces vectoriels

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 6 Février 2013

Espaces vectoriels

Un espace vectoriel réel : un ensemble E non vide muni des opérations d'addition $+$ et de multiplication scalaire \cdot t.q.

- 1 L'addition est interne : on a $+$: $E \times E \rightarrow E : (u, v) \mapsto u + v$, et la multiplication scalaire satisfait \cdot : $\mathbb{R} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$;
- 2 $+$ est associative : on a $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$;
- 3 $+$ admet un élément neutre $0 \in E$ t.q. $0 + u = u + 0 = u$ pour tout $u \in E$;
- 4 Tout élément $u \in E$ admet un opposé $-u$ pour l'addition, satisfaisant $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
- 5 $+$ est commutative : on a $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$;
- 6 La multiplication distribue l'addition des vecteurs : on a $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ pour tous $u, v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$;
- 7 La multiplication distribue l'addition des réels : on a $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in E$;
- 8 On a $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour tous $u \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- 9 On a $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$.

Exemples exotiques I

- ① L'ensemble $E =]0, +\infty[^2$ muni des opérations d'addition \oplus et de multiplication \odot définies par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in]0, +\infty[, \quad (1)$$

et

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

est un espace vectoriel.

- ② Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On définit l'addition et la multiplication scalaire par

$$\begin{cases} (f + g)(x) & = f(x) + g(x); \\ (\lambda f)(x) & = \lambda f(x); \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

pour toutes fonctions f et g et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples exotiques II

- ③ Soit \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : Une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n , est une fonction P telle qu'il existe des coefficients $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients c_0, \dots, c_n sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à n . La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (3). Alors \mathcal{P} est un espace vectoriel.

Exemples exotiques II

- ③ Soit \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : Une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n , est une fonction P telle qu'il existe des coefficients $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients c_0, \dots, c_n sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à n . La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (3). Alors \mathcal{P} est un espace vectoriel.

- ④ L'ensemble $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni des opérations définies par (3), est un espace vectoriel.

Exemples exotiques II

- ③ Soit \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : Une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n , est une fonction P telle qu'il existe des coefficients $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients c_0, \dots, c_n sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à n . La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (3). Alors \mathcal{P} est un espace vectoriel.

- ④ L'ensemble $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni des opérations définies par (3), est un espace vectoriel.
- ⑤ L'ensemble \mathcal{P}_2 des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni encore des mêmes opérations, est un espace vectoriel.

Exemples exotiques II

- ③ Soit \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : Une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n , est une fonction P telle qu'il existe des coefficients $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients c_0, \dots, c_n sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à n . La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (3). Alors \mathcal{P} est un espace vectoriel.

- ④ L'ensemble $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni des opérations définies par (3), est un espace vectoriel.
- ⑤ L'ensemble \mathcal{P}_2 des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni encore des mêmes opérations, est un espace vectoriel.
- ⑥ L'ensemble $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$, muni des opérations (3), est un espace vectoriel ; l'ensemble $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 3\}$, muni des opérations (3), n'en est pas un.

Exemple fondamental : L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

L'ensemble \mathbb{R}^n est fait des n -uplets de nombres que l'on note verticalement

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour gagner de la place, on notera cet élément $(x_1, \dots, x_n)^\sim$. L'opération \sim étant la transposition que l'on reverra au cours de calcul matriciel.

L'addition et la multiplication scalaires sont définies de la manière la plus simple qui soit. On définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $\lambda, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Cet ensemble muni de ces opérations est un espace vectoriel.

Si on n'indique pas les opérations, ce sera toujours celles-ci qui seront utilisées.