Espaces vectoriels

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 5 Février 2014

Contenu du cours

Contenu :

1. Espaces vectoriels (les “flèches”)
2. Espaces affines (les “points”)
3. Espaces vectoriels euclidiens (produit scalaire, norme, produit vectoriel)
4. Espaces affines euclidiens (Pythagore et compagnie,...)
5. Théorie des courbes (mouvements,...)
6. Théorie des surfaces (Sphères, cylindres,...)

Point de vue :

1. On part de la définition “intuitive” en dimension 2 ou 3
2. On pose une définition formelle qui la généralise
3. Cela implique souvent d'aller “à l'envers”.

Exemples

1. Quel est l'angle entre les "tableaux" (matrices)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Comment trouver une équation de l'ensemble "engendré par" ces matrices ?
3. Peut-on décrire une droite déterminée par ces matrices ?
4. Les fonctions cos et sin, définies sur $[-\pi, \pi]$, sont-elles orthogonales ?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques suggestions

1. Lire les engagements pédagogiques (MyUlg)
2. Lire le cours à l'avance (3-4 pages)
3. Etudier les définitions, puis les énoncés, puis les démonstrations.
4. Poser des questions (avant, pendant, ou après le cours).
5. Faire les exercices proposés.
6. Généralement tous les mots comptent (exactement) :

Kaamelott, UNAGI II

Espaces vectoriels

Définition 1.1

Un espace vectoriel réel est un ensemble E non vide muni des opérations d'addition $+$ et de multiplication scalaire $\cdot$ t.q.

1. L'addition est interne : on a $+ : E \times E \to E : (u, v) \mapsto u + v$, et la multiplication scalaire satisfait $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$;
2. $+$ est associative : on a $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$;
3. $+$ admet un élément neutre $0 \in E$ t.q. $0 + u = u + 0 = u$ pour tout $u \in E$;
4. Tout élément $u \in E$ admet un opposé $-u$ pour l'addition, satisfaisant $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
5. $+$ est commutative : on a $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$;
6. La multiplication distribue l'addition des vecteurs : on a $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ pour tous $u, v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$;
7. La multiplication distribue l'addition des réels : on a $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in E$;
8. On a $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour tous $u \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
9. On a $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$.

Exemples exotiques I

1. L'ensemble $E =]0,+\infty[^2$ muni des opérations d'addition $\oplus$ et de multiplication $\odot$ définies par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in]0,+\infty[, \tag{1.1}$$

et

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\lambda} \\ x_2^{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2 \in]0,+\infty[, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

est un espace vectoriel.

2. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication scalaire par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x); \\ (\lambda f)(x) & = & \lambda f(x); \end{array} \right. , \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

pour toutes fonctions f et g et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples exotiques II

3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n, est une fonction P telle qu'il existe des coefficients $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients $c_0, \ldots, c_n$ sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à n. La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (1.3). Alors $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel.
4. L'ensemble $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations définies par (1.3), est un espace vectoriel.
5. L'ensemble $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni encore des mêmes opérations, est un espace vectoriel.
6. L'ensemble $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$, muni des opérations (1.3), est un espace vectoriel ; l'ensemble $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 3\}$, muni des opérations (1.3), n'en est pas un.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemple fondamental : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est fait des n-uplets de nombres que l'on note verticalement

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour gagner de la place, on notera cet élément $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$. L'opération $\sim$ étant la transposition que l'on reverra au cours de calcul matriciel.
L'addition et la multiplication scalaires sont définies de la manière la plus simple qui soit. On définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $\lambda, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
Cet ensemble muni de ces opérations est un espace vectoriel.
Si on n'indique pas les opérations, ce sera toujours celles-ci qui seront utilisées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition 1.2

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^1_3.$$

Définition 1.3

L'élément i, j de la matrice A, noté $(A)_{i,j}$, est le nombre situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

$$(A)_{1,3} = 3, \quad (B)_{3,2} = \sqrt{3}, \quad (B)_{2,3} = e, \ldots$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

- Une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^p_q$ a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

  On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies "élément à élément" : on a

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$$

  pour tous $A, B \in \mathbb{R}^p_q$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les matrices n'ayant qu'une seule ligne sont appelées matrices lignes ou vecteurs lignes, et celles n'ayant qu'une colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.