

## Espaces vectoriels

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 5 Février 2014

## Contenu du cours

Contenu :

- 1 Espaces vectoriels (les “flèches”)
- 2 Espaces affines (les “points”)
- 3 Espaces vectoriels euclidiens (produit scalaire, norme, produit vectoriel)
- 4 Espaces affines euclidiens (Pythagore et compagnie,...)
- 5 Théorie des courbes (mouvements,...)
- 6 Théorie des surfaces (Sphères, cylindres,...)

Point de vue :

- 1 On part de la définition “intuitive” en dimension 2 ou 3
- 2 On pose une définition formelle qui la généralise
- 3 Cela implique souvent d’aller “à l’envers”.

2

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Exemples

- 1 Quel est l’angle entre les “tableaux” (matrices)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- 2 Comment trouver une équation de l’ensemble “engendré par” ces matrices ?
- 3 Peut-on décrire une droite déterminée par ces matrices ?
- 4 Les fonctions cos et sin, définies sur  $[-\pi, \pi]$ , sont-elles orthogonales ?

3

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Quelques suggestions

- 1 Lire les engagements pédagogiques (MyUlg)
- 2 Lire le cours à l’avance (3-4 pages)
- 3 Etudier les définitions, puis les énoncés, puis les démonstrations.
- 4 Poser des questions (avant, pendant, ou après le cours).
- 5 Faire les exercices proposés.
- 6 Généralement tous les mots comptent (exactement) :

Kaamelott, UNAGI II

4

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Espaces vectoriels

### Définition 1.1

Un espace vectoriel réel est un ensemble  $E$  non vide muni des opérations d'addition  $+$  et de multiplication scalaire  $\cdot$  t.q.

- 1 L'addition est interne : on a  $+$  :  $E \times E \rightarrow E : (u, v) \mapsto u + v$ , et la multiplication scalaire satisfait  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ;
- 2  $+$  est associative : on a  $(u + v) + w = u + (v + w)$  pour tous  $u, v, w \in E$ ;
- 3  $+$  admet un élément neutre  $0 \in E$  t.q.  $0 + u = u + 0 = u$  pour tout  $u \in E$ ;
- 4 Tout élément  $u \in E$  admet un opposé  $-u$  pour l'addition, satisfaisant  $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ;
- 5  $+$  est commutative : on a  $u + v = v + u$  pour tous  $u, v \in E$ ;
- 6 La multiplication distribue l'addition des vecteurs : on a  $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$  pour tous  $u, v \in E$  et  $a \in \mathbb{R}$ ;
- 7 La multiplication distribue l'addition des réels : on a  $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$  pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $u \in E$ ;
- 8 On a  $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$  pour tous  $u \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
- 9 On a  $1 \cdot u = u$  pour tout  $u \in E$ .

## Exemples exotiques II

- 3 Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  : Une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de degré inférieur ou égal à  $n$ , est une fonction  $P$  telle qu'il existe des coefficients  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer que pour une telle fonction, les coefficients  $c_0, \dots, c_n$  sont uniques. Une fonction est polynomiale, s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'elle soit polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ . La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (1.3). Alors  $\mathcal{P}$  est un espace vectoriel.

- 4 L'ensemble  $C_0(\mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni des opérations définies par (1.3), est un espace vectoriel.
- 5 L'ensemble  $\mathcal{P}_2$  des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni encore des mêmes opérations, est un espace vectoriel.
- 6 L'ensemble  $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$ , muni des opérations (1.3), est un espace vectoriel ; l'ensemble  $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 3\}$ , muni des opérations (1.3), n'en est pas un.

## Exemples exotiques I

- 1 L'ensemble  $E = ]0, +\infty[^2$  muni des opérations d'addition  $\oplus$  et de multiplication  $\odot$  définies par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in ]0, +\infty[, \quad (1.1)$$

et

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2 \in ]0, +\infty[, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

est un espace vectoriel.

- 2 Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit l'addition et la multiplication scalaire par

$$\begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x); \\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x); \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Exemple fondamental : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  est fait des  $n$ -uplets de nombres que l'on note verticalement

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour gagner de la place, on notera cet élément  $(x_1, \dots, x_n)^\sim$ . L'opération  $\sim$  étant la transposition que l'on reverra au cours de calcul matriciel. L'addition et la multiplication scalaires sont définies de la manière la plus simple qui soit. On définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

pour tous  $\lambda, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ .

Cet ensemble muni de ces opérations est un espace vectoriel.

Si on n'indique pas les opérations, ce sera toujours celles-ci qui seront utilisées.

## L'espace vectoriel $\mathbb{R}_q^p$ .

### Définition 1.2

Une *matrice* de type  $(p, q)$  est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant  $p$  lignes et  $q$  colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à  $p$  lignes et  $q$  colonnes. Alors  $\mathbb{R}_q^p$  est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^2, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3, C = (1 \ 2 \ 3) \in \mathbb{R}_3^1.$$

### Définition 1.3

L'élément  $i, j$  de la matrice  $A$ , noté  $(A)_{i,j}$ , est le nombre situé sur la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

$$(A)_{1,3} = 3, \quad (B)_{3,2} = \sqrt{3}, \quad (B)_{2,3} = e, \dots$$

9

## L'espace vectoriel $\mathbb{R}_q^p$ .

- Une matrice quelconque  $A$  de  $\mathbb{R}_q^p$  a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

On a alors  $(A)_{i,j} = a_{i,j}$ . On note aussi  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ .

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies "élément à élément" : on a

$$(A + B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda(A)_{i,j}$$

pour tous  $A, B \in \mathbb{R}_q^p$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Les matrices n'ayant qu'une seule ligne sont appelées matrices lignes ou vecteurs lignes, et celles n'ayant qu'une colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes.

10