Espaces vectoriels II

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 7 Février 2013

Contenu

- L'espace vectoriel des matrices ;
- Espaces vectoriels : propriétés directes ;
- Combinaisons linéaires ;
- Sous-espaces vectoriels ;
  1. Définitions ;
  2. Exemples.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3,$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3,$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p,q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^1_3.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p,q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^1_3.$$

Définition

L'élément i,j de la matrice A, noté $(A)_{i,j}$, est le nombre situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Définition

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^1_3.$$

Définition

L'élément i, j de la matrice A, noté $(A)_{i,j}$, est le nombre situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

$$(A)_{1,3} = 3, \quad (B)_{3,2} = \sqrt{3}, \quad (B)_{2,3} = e, \ldots$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

- Une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^p_q$ a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

- Une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^p_q$ a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

  On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies “élément à élément” : on a

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$$

  pour tous $A, B \in \mathbb{R}^p_q$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

- Une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^p_q$ a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

  On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies "élément à élément" : on a

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda(A)_{i,j}$$

  pour tous $A, B \in \mathbb{R}^p_q$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les matrices n'ayant qu'une seule ligne sont appelées matrices lignes ou vecteurs lignes, et celles n'ayant qu'une colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes.

Propriétés directes

Proposition

Soit E un espace vectoriel.

1. *L'élément neutre pour l'addition est unique ;*
2. *Tout vecteur $u \in E$ admet un unique opposé ;*
3. *Pour tout $u \in E$, on a $0 \cdot u = 0$* [1] *;*
4. *Pour tout $u \in E$, on a $-u = (-1) \cdot u$* [1] *;*
5. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot 0 = 0$;*
6. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ satisfont $\lambda \cdot u = 0$, alors on a $u = 0$ ou $\lambda = 0$.*

1. routine ;
2. routine ;
3. le truc est $u = 1 \cdot u = (1 + 0) \cdot u$;
4. $(-1) \cdot u$ a la bonne propriété ;
5. le truc est $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u + 0)$ pour $u \in E$;
6. si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est bien défini.

1. Les zéros de part et d'autre de l'égalité n'ont pas le même sens, de même que les signes -

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Remarques et notations

Remarques :

1. Ce sont les propriétés principales de l'addition et de la multiplication scalaire. Toutes les autres doivent et peuvent être démontrées de la même façon à partir des conditions intervenant dans la définition, ou à partir de ce que nous avons déjà démontré.
2. Dans la suite, nous ne noterons plus la multiplication du vecteur u par le réel λ par $\lambda \cdot u$, mais simplement par λu.
3. Nous n'aurons pas de notation particulière pour les vecteurs.

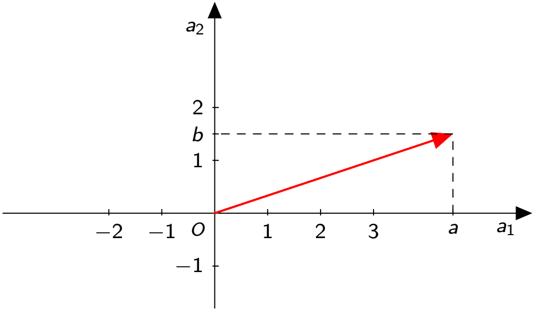
Notations :

1. La soustraction $u - v$ est définie par $u + (-v)$;
2. La division d'un vecteur u par un réel a non nul est définie par $\frac{u}{a} = \frac{1}{a}u$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une représentation intuitive et commode

Dans l'enseignement secondaire, on trace deux droites perpendiculaires et orientées a_1 et a_2, qui se coupent en O. On porte sur ces droites les mêmes unités. Le couple $(a, b)^\sim$ est alors représenté par le point A obtenu en portant la valeur a sur le premier axe et la valeur b sur le second : on peut représenter l'élément $(a, b)^\sim$ de *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ par une flèche de O à A



Attention : ces objets ne sont pas encore définis dans le cours ! ! ! Il s'agit donc d'une représentation pour guider l'intuition.

Combinaisons linéaires

Soit E un espace vectoriel, $u_1, \ldots, u_p \in E$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

Définition

Le vecteur défini par

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, avec les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Exemple :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1,$$

on a directement

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 2u_1 + 3u_2 - u_3 = \ldots$$

Remarque : on a aussi $2u_1 + 3u_2 - u_3 = 9u_2 + 3u_3$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u_1 = (1,2,3)^\sim$, $u_2 = (-1,0,1)^\sim$ et $u_3 = (4,2,1)^\sim$, alors on a
$$3u_1 - u_2 + u_3 = \dots$$
2. Dans $(]0,+\infty[^2, \oplus, \odot)$, si $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors on a
$$3 \odot u_1 \oplus 2 \odot u_2 = \dots$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide V de E qui contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Autrement dit, un sous-ensemble V non vide de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{c} p \in \mathbb{N}_0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \\ u_1, \ldots, u_p \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in V.$$

Proposition

Une partie non vide V d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, pour tous $u, v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu et $u + v$ appartiennent à V.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples avec des équations

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel standard. Alors

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de E. De même l'ensemble

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ x_1 - 5x_2 & = & 0 \end{array} \right. \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples paramétriques

Exemple

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$. Alors,

$$V_3 = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. De même, si u et v sont dans E, alors

$$V_4 = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Utilité

Proposition

Si $(E, +, 0, \cdot)$ *est un espace vectoriel et si* V *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $(V, +, 0, \cdot)$ *est un espace vectoriel.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Utilité

Proposition

Si $(E, +, 0, \cdot)$ *est un espace vectoriel et si* V *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $(V, +, 0, \cdot)$ *est un espace vectoriel.*

Attention, la réciproque est fausse : si E est un espace vectoriel, et si V est un sous-ensemble de E qui admet une structure d'espace vectoriel, cela n'implique pas que V est un sous-espace vectoriel de E.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.